Когда люди завязали первые узлы?

Почему убили первую женщину-математика?

Можно ли вывернуть сферу наизнанку?

Это лишь некоторые из вопросов, ответы на которые даются в этой прекрасно иллюстрированной книге. Клиффорд А. Пиковер раскрывает магию и тайны самых значительных вех в истории математики, а также самых странных объектов и идей человечества, о существовании которых когда-либо можно было предполагать.

Известные формулы и математические понятия сопровождаются интересными фактами из жизни математиков и о практическом воплощении в жизнь доказанных ими теорем.

Книга Клиффорда Пиковера – это путешествие по 250 открытиям в математике, начиная от шагомера древних муравьев и первых счетов, до открытия компьютерных фракталов и поисков новых размерностей. В книге также приводятся идеи, связанные с выдающимися мыслителями от Пифагора и Евклида до идола современной математики Мартина Гарднера и космолога Макса Тегмарка. Все статьи в книге приведены в хронологическом порядке, написаны по возможности наиболее кратко и сопровождаются красочными иллюстрациями.

Математика меня повергает в состояние постоянных раздумий о природе ума, пределах человеческого познания и нашем месте в этом огромном космосе.

Клиффорд Пиковер

Клиффорд Пиковер

Великая МαТЕМАТИКА

От Пифагора до 57-мерных объектов

250 основных вех в истории математики

Издательство БИНОМ

Clifford A. Pickover

The Math BOOK

From Pythagoras to the 57th Dimension,
250 Milestones in the History of Mathematics

Клиффорд Пиковер

Великая МАТЕМАТИКА

От Пифагора до 57-мерных объектов
250 основных вех в истории математики

Перевод с английского
С. А. Иванова

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний

УДК 501+001
ББК 22г+72.3
П32

Публикуется с разрешения
STERLING PUBLISHING CO., INC. (США)
при содействии Агентства Александра Корженевского (Россия)

Пиковер К.

П32 Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 основных вех в истории математики / К. Пиковер ; пер. с англ. С. А. Иванова — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 539 с. : ил.

ISBN 978-5-99963-0514-8

Книга «Великая математика» включает 250 иллюстрированных исторических эссе, посвященных развитию математики. Каждая статья в доступной форме отражает квинтэссенцию описываемого математического достижения. Автор книги, известный популяризатор науки, блестящий журналист, выпускник Йельского университета, издал более 40 научно-популярных книг по математике, физике, медицине, религии, информатике и др., многие из которых переведены на иностранные языки.

Для всех любителей математики.

УДК 501+001
ББК 22г+72.3

16+

Научно-популярное издание

Пиковер Клиффорд

ВЕЛИКАЯ МАТЕМАТИКА
ОТ ПИФАГОРА ДО 57-МЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ
250 ОСНОВНЫХ ВЕХ В ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художественное оформление: *И. Е. Марев*
Художник *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *Е. Н. Клитина*
Компьютерная верстка: *Е. А. Голубова*

Подписано в печать 10.07.14. Формат 84×90/16.
Усл. печ. л. 47,60.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272, e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 978-5-9963-0514-8

Если посмотреть на математику должным образом, то окажется, что она обладает не только истиной, но и высшей красотой – красотой холодной и строгой, подобной красоте скульптуры.

Бертран Рассел (Bertrand Russel, *Mysticism and Logic*, 1918)

Математика является прекрасным, увлекательным предметом, полным воображения, фантазии и творчества, которое ограничивается не мелочами физического мира, а лишь силой нашего внутреннего света.

Грегори Чейтин (Gregory Chaitin, «LessProof, More Truth», *New Scientist*, July 28, 2007)

Может быть, ангел Господень обозрел бесконечное море хаоса, а затем мягко коснулся его своим перстом. В этом крошечном и недолговечном водовороте формул и возникла наша Вселенная.

Мартин Гарднер (Martin Gardner, *Order and Surprise*, 1950)

Великие уравнения современной физики являются неотъемлемой частью научных знаний, они способны пережить даже те шедевры зодчих, которые были созданы задолго до их открытия.

Стивен Вайнберг (Steven Weinberg, in Graham Farmelo's *It Must Be Beautiful*, 2002)

Содержание

Введение

Красота и польза математики

> *Вдумчивый наблюдатель, видя математиков за работой, может сделать вывод, что они являются последователями экзотических сект, посвятившими себя поискам эзотерических ключей от Вселенной.*
>
> Филип Дэвис и Рувим Херш
> (Philip Davis and Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*)

Математика пронизывает все области научной деятельности и имеет неоценимое значение в биологии, физике, химии, экономике, социологии и технике.

С помощью математики можно объяснить цвет закатного неба или архитектуру нашего мозга. Математика помогает строить сверхзвуковые самолеты и американские горки, моделировать запасы земных природных ресурсов, изучать субатомную квантовую структуру и получать изображение далеких галактик. Математика изменила наш взгляд на космос.

Я надеюсь, что эта книга, в которой используется всего несколько формул, привьет читателям вкус к математике, будет способствовать развитию их воображения и даст им пищу для ума. Однако эта книга – не просто сборник различных интересных фактов, не представляющих большой ценности для среднего читателя. На самом деле, согласно сообщениям департамента образования США, успешное окончание курса математики в средней школе ведет к более плодотворной учебе в колледже *вне зависимости от того, какую специальность* выбрал студент.

Математика *полезна* тем, что позволяет нам строить космические корабли и изучать геометрию нашей Вселенной. Числа могут стать нашим первым средством связи с разумными инопланетными расами. Некоторые физики даже считают, что понимание более высоких пространственных измерений и *топологии* – науки, изучающей различные виды форм и их взаимосвязи, – может когда-нибудь дать человечеству шанс в поисках выхода из нашей Вселенной, когда она прекратит свое существование вследствие либо невыносимой жары, либо холода, и тогда бы мы смогли назвать нашим домом все пространство-время.

В истории математики многие открытия совершались одновременно несколькими людьми. Как я уже упоминал в моей книге «Лента Мёбиуса», в 1858 г. лента Мёбиуса (удивительный перекрученный объект, имеющий только одну сторону) одновременно и независимо друг от друга была открыта Августом Мёбиусом (1790–1868) и его современником, немецким математиком Иоганном Бенедиктом Листингом (1808–1882). Это открытие, сделанное одновременно Мёбиусом и Листингом, подобно тому как математический анализ был одновременно разработан английским ученым-эрудитом Исааком Ньютоном (1643–1727) и немецким математиком Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646–1716), заставляет меня задаться вопросом: почему так много открытий в науке были сделаны одновременно разными учеными, работающими независимо друг от друга? В качестве другого примера можно привести британских натуралистов Чарльза Дарвина (1809–1882) и Альфреда Уоллеса (1823–1913), которые одновременно и независимо друг от друга разработали теорию эволюции. Кроме того, как оказалось, гиперболическая геометрия была одновременно разработана венгерским математиком Яношем Бойяи (1802–1860) и русским математиком Николаем Лобачевским (1793–1856) независимо друг от друга.

Скорее всего, такие одновременные открытия были сделаны потому, что просто пришло время для таких открытий, с учетом знаний, накопленных человечеством на тот момент. Иногда двум ученым идеи приходят во время прочтения результатов одних и тех же предварительных исследований, полученных одним из современников. В то же время мистики полагают, что в таких совпадениях присутствует более глубокий смысл. Австрийский биолог Пауль Каммерер (1880–1926) писал: «Таким образом, мы приходим к образу мира-мозаики или к космическому калейдоскопу, который, несмотря на постоянные перетасовки и перестановки стеклышек, тем не менее стремится так или иначе уложить их вместе». Он сравнил события в нашем мире с гребнями океанских волн, кажущимися изолированными и не связанными друг с другом. Согласно его спорной теории, мы замечаем лишь гребни волн, однако под их поверхностью может находиться некий синхронно работающий механизм, который мистическим образом соединяет события в нашем мире и заставляет их объединяться в группы.

Жорж Ифра в своей книге «Всеобщая история чисел» рассматривает вопрос одновременности открытий, когда пишет о математике майя:

> *«Поэтому мы еще раз видим, как люди, сильно отделенные друг от друга временем или пространством, пришли… к очень похожим, если не идентичным, результатам. …В некоторых случаях объяснение этому можно найти в контактах и взаимном влиянии различных групп людей… Истинная причина заключается в том, что мы ранее называли глубоким единством культуры: интеллект человека разумного является универсальным и его потенциал является удивительно равномерно распределенным по всем частям света».*

Древние люди, такие как древние греки, были глубоко увлечены числами. Может быть, в трудные времена в постоянно меняющемся мире лишь числа оставались непреходящими? Для древнегреческого союза пифагорейцев числа были материальными, неизменными, удобными, вневременными сущностями – более надежными, чем друзья, менее грозными, чем Аполлон и Зевс.

Тематика многих статей в этой книге связана с целыми числами. Гениальный математик Пол Эрдёш (1913–1996) был очарован теорией чисел (занимающейся исследованием целых чисел) и поставил много задач, простых в формулировке, но чрезвычайно сложных в решении. Эрдёш считал, что если в математике и можно сформулировать какую-то проблему, которая будет неразрешимой в течение более сотни лет, то эта проблема будет именно в теории чисел.

Многие аспекты Вселенной могут быть выражены целыми числами. Числовые последовательности характеризуют расположение лепестков в цветке ромашки, размножение кроликов, орбиты планет, гармонию в музыке и взаимосвязи элементов в Периодической таблице Менделеева. Леопольд Кронекер (1823–1891), немецкий алгебраист и специалист в области теории чисел, сказал однажды: «Целые числа пришли от Бога, а все остальное создано человеком». Он подразумевал, что целые числа являются первоначалом всей математики.

Еще со времен Пифагора признавалась роль целочисленных отношений в нотном стане. Что более важно, целые числа сыграли решающую роль в эволюции понимания человечеством науки. Например, французский химик Антуан Лавуазье (1743–1794) обнаружил, что химические соединения состоят из фиксированных пропорций элементов, соответствующих отношениям небольших целых чисел. Это было очень убедительным доказательством существования атомов. В 1925 г. определенные целочисленные соотношения между длинами волн спектральных линий, испускаемых возбужденными атомами, дали самые первые ключи к пониманию структуры атомов. Почти целочисленные соотношения атомных масс стали доказательством того, что атомное ядро состоит из целого числа одинаковых нуклонов (протонов и нейтронов). Отклонения от целочисленных отношений в этом случае привели к открытию изотопов химических элементов (разновидностей атомов с почти одинаковыми химическими свойствами, но с разным количеством нейтронов).

Небольшие отклонения атомных масс изотопов от точных целочисленных значений подтвердили знаменитое уравнение Эйнштейна $E = mc^2$, а также возможность создания атомной бомбы. Целые числа повсеместно присутствуют в атомной физике. Отношения целых чисел являются основной нитью в ткани математической науки, или, как сказал немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855), «математика – царица наук, а теория чисел – царица математики».

Математическое описание Вселенной постоянно растет, но образ нашего мышления и наш язык остаются прежними. В наше время постоянно открываются и создаются новые разделы математики, но при этом мы нуждаемся в свежем образе мышления и понимания. Например, в последние годы было предложено несколько математических доказательств известных в истории математики задач, но эти доказательства оказались слишком длинными и сложными, чтобы убедить специалистов в их правильности. Математику Томасу Хейлзу пришлось ждать *пять лет*, прежде чем рецензенты его геометрической статьи, принятой к печати в журнале *Annals of Mathematics*, в конечном итоге признали, что не смогли найти ошибок в статье и что журнал может опубликовать доказательство Хейлза, но только с примечанием, что журнал не гарантирует правильность решения! Более того, математик Кит Девлин в газете *New York Times* высказал предположение, что «математика достигла в своем развитии такой стадии абстракции, что многие ее пограничные вопросы непонятны даже специалистам». Если уж специалисты сталкиваются с такого рода проблемами, то легко понять, как сложно им порой доводить такого рода информацию до широкой публики. Мы делаем всё, что можем. Математики могут строить теории и производить вычисления, но могут оказаться неспособными до конца осмыслить, объяснить или передать свои идеи другим людям.

Здесь уместно провести аналогию с физикой. В то время как Вернер Гейзенберг был обеспокоен тем, что человек никогда не сможет по-настоящему понять строение атома, Нильс Бор был немного более оптимистичен в этом отношении. В начале 1920-х гг. он писал: «Я думаю, что мы, возможно, готовы сделать это, но в процессе понимания структуры атома нужно уяснить себе смысл самого слова "понимание"». Сегодня с помощью компьютеров можно делать различные выводы, лежащие за пределами ограничений, накладываемых нашей собственной интуицией. В самом деле, компьютерные эксперименты приводят математиков к таким открытиям и озарениям, о которых они ранее и не мечтали до той поры, пока компьютеры не получили широкого распространения. Компьютеры и компьютерная графика позволяют математикам обнаруживать результаты задолго до того, как они могут их доказать на уровне формул, а также помогают открывать совершенно новые области математики.

Даже такие простые компьютерные программы, как программа табличных расчетов, дают современной математике такую вычислительную мощь, которую жаждали бы иметь Гаусс, Леонард Эйлер и Ньютон. Приведем лишь один пример: в конце 1990-х гг. компьютерные программы, разработанные Дэвидом Бейли и Геламаном Фергюсоном, помогли создать новые формулы, которые установили связь между числом «пи» и log 5, а также с двумя другими константами. По сообщению Эрика Кларрайха в журнале *Science News*, как только компьютер составил эту формулу, проверка ее правильности стала очень простым делом. Часто простое *знание* ответа является самым большим препятствием, которое требуется преодолеть при проведении доказательства.

Математические теории иногда использовались для предсказания явлений, которые в течение долгих лет не могли найти себе подтверждения. Например, уравнения Максвелла, названные в честь физика Джеймса Кларка Максвелла, предсказали открытие радиоволн. Из уравнений поля Эйнштейна следовало, что гравитация способна преломлять свет и что Вселенная расширяется. Физик Поль Дирак однажды заметил, что абстрактная математика, изучаемая нами сегодня, дает представление о физике в будущем. В самом деле, его уравнения предсказали существование антиматерии, которая впоследствии и была обнаружена. Также математик Николай Лобачевский говорил, что «не существует такого раздела математики, даже совершенно абстрактного, который не был бы когда-нибудь применен к явлениям реального мира».

В этой книге вы встретитесь с различными интересными видами геометрий, в которых, как полагали, были сокрыты ключи от Вселенной. Галилео Галилей (1564–1642) считал, что «Великая книга природы написана на языке математики». Иоганн Кеплер (1571–1630) построил модель Солнечной системы, использовав для этого платоновы тела, подобные додекаэдру. В 1960 г. физик Юджин Вигнер (1902–1995) был впечатлен «необоснованной эффективностью математики в естественных науках». Большие группы Ли, такие как группа Ли E_8, которая обсуждается в данной книге в статье **«В поисках группы Ли E_8»** (2007), возможно, помогут в будущем создать единую теорию физики. В 2007 г. шведско-американский космолог Макс Тегмарк опубликовал ряд научных и популярных статей, посвященных математической гипотезе Вселенной, которая утверждает, что наша физическая реальность является математической структурой, иными словами, наша Вселенная не просто *описывается* математикой – она и *есть* сама математика.

Структура и цель написания данной книги

На каждом важном этапе своего развития физика требует и часто стимулирует создание новых математических инструментов и понятий. Наше современное понимание законов физики, со всей их крайней точностью и универсальностью, возможно только в терминах математики.

Сэр Майкл Атья (Sir Michael Atiyah, «Pulling the Strings», *Nature*)

Одной из распространенных характеристик математиков является страсть к завершенности – желание вернуться к начальным принципам для объяснения своей работы. В результате читателям математических текстов часто приходится продираться через страницы предпосылок, прежде чем они доберутся до самой сути. Чтобы избежать этой проблемы, статьи в книге весьма коротки, в лучшем случае несколько абзацев. Такой формат позволяет читателям двигаться по кратчайшему пути для лучшего понимания самой темы статьи, без необходимости разбираться в большом объеме информации. Хотите узнать о бесконечности? Обратитесь к статье «**Трансфинитные числа Кантора**» (1874) или «**Парадокс "Гранд-отеля" Гильберта**» (1925), и вы получите сеанс быстрой тренировки мышления. Вас интересует первый коммерчески успешный карманный механический калькулятор, разработанный заключенным в нацистском концентрационном лагере? Прочитайте статью «**Калькулятор "Curta"**» (1948), где вы найдете краткое описание истории разработки этого устройства. Интересно, как забавно звучащая теорема однажды помогла ученым в создании нанопроводов для электронных устройств? Тогда загляните в статью «**Теорема о волосатом шаре**» (1912).

Почему нацисты заставили президента Польского математического сообщества сдавать свою собственную кровь для кормления вшей? Почему убили первую женщину-математика? Возможно ли на самом деле вывернуть сферу наизнанку? Кто был «Числовым папой римским»? Когда же люди завязали свои первые узлы? Почему мы больше не пользуемся римскими цифрами? Как звали самого древнего ученого в истории математики? Может ли поверхность иметь только одну сторону? Ответы на эти и другие заставляющие задуматься вопросы вы найдете на страницах данной книги.

Конечно, мой подход имеет некоторые недостатки. Нельзя в нескольких абзацах глубоко развить какую-либо тему. Поэтому в разделе «**Примечания и список дополнительной литературы**» читателям предложен список литературы для дальнейшего чтения. Хотя иногда я привожу список первоисточников, часто я также указываю ссылки на производные материалы, которые читателям зачастую проще найти, чем более старые первоисточники. Читатель, заинтересовавшийся изучением любой темы, может использовать эти ссылки в качестве полезной отправной точки.

Моя цель написания книги «**Великая математика**» заключается в том, чтобы предоставить широкой аудитории краткий справочник важных математических идей и их создателей в формате небольших статей, достаточно коротких для того, чтобы читатель смог воспринять информацию всего за несколько

минут. Большинство статей посвящены темам, интересующим меня лично. Увы, я, будучи ограниченным объемом, не смог включить в нее все великие вехи на пути развития математики. Таким образом, отмечая некоторые удивительные явления математики, я был вынужден пропустить много замечательных математических чудес. Тем не менее я считаю, что в эту книгу вошло большинство математических событий из тех, которые сыграли важную роль в истории математики и оказали сильное влияние как на саму математику, так и на общество и на человеческое мышление в целом.

Некоторые статьи посвящены в высшей степени практическим вещам, например логарифмической линейке и другим вычислительным устройствам, а также геодезическому куполу и изобретению нуля. Изредка в книге встречаются более легкие темы, которые, тем не менее, имеют важное значение, например кубик Рубика или решение задачи о складывании простыни. Иногда фрагменты информации повторяются с тем, чтобы каждую статью можно было читать независимо от других. Слова, выделенные полужирным шрифтом, отсылают читателя к соответствующим статьям. Кроме того, небольшой раздел **«СМ. ТАКЖЕ»** внизу страницы для каждой статьи организует путешествие по книге в игровой манере поиска новых открытий.

Книга «**Великая математика**» отражает мои собственные пробелы в знаниях – в то время, когда я старался осветить максимально большое количество областей науки и математики, мне было трудно высказаться по всем аспектам, и в этой книге ясно проступают мои личные интересы, равно как и мои сильные и слабые стороны. Я несу ответственность как за выбор вошедших в эту книгу ключевых статей, так и, конечно, за любые ошибки и неточности. Эта книга не является исчерпывающей монографией или научной диссертацией, скорее, она предназначена для развлекательного чтения для школьников, студентов естественнонаучных факультетов, а также математиков и заинтересованных непрофессионалов. Я буду весьма признателен за обратную связь и предложения читателей по улучшению книги, поскольку считаю ее продолжающимся проектом и своим любимым делом.

Книга написана в хронологической последовательности, в зависимости от года математического события или открытия. (Даты, относящиеся к Древнему миру, являются приблизительными. – *Прим. ред.*) Иногда в литературе можно найти отличающиеся даты одних и тех же событий, поскольку некоторые источники указывают дату публикации как ту дату, когда было сделано данное открытие, в то время как другие источники дают фактическую дату, когда был открыт тот или иной математический закон, несмотря на то что дата его опубликования иногда бывает годом или несколькими годами позже. Если я сомневался в точности самой ранней даты открытия, то часто использовал в качестве нее дату соответствующей публикации.

Датирование статей также может быть предметом дискуссии, когда свой вклад в данное открытие внесли несколько ученых. Зачастую, когда это было целесообразным, я использовал самую раннюю дату, но иногда по совету коллег ставил ту дату, когда какая-либо идея занимала особенно видное положение. В качестве примера можно привести код Грея, который используется для облегчения коррекции ошибок в цифровой связи, например при передаче телевизионного сигнала, и делает линии передачи менее чувствительными к шуму. Этот код был назван в честь Фрэнка Грея – физика, работавшего в *Bell*

Telephone Laboratories в 1950–1960-х гг. В то время этот вид кодов играл важную роль, отчасти из-за патента на него, выданного в 1947 г., а также благодаря появлению современных линий связи. Статья, посвященная коду Грея, относится к 1947 г., хотя он, возможно, появился гораздо раньше, потому что корни этой идеи тянутся к Эмилю Бодо (1845–1903), французскому пионеру телеграфа. В любом случае, в каждой статье или в разделе **«Примечания и дополнительная литература»** я попытался дать читателям почувствовать разброс возможных дат событий.

Ученые иногда спорят в отношении лица, которому по традиции приписывается то или иное открытие. Например, автор Генрих Дорри называет имена четырех ученых, которые считают, что конкретная версия задачи Архимеда о быках не связана с Архимедом, но также называет четырех авторов, которые считают, что эта задача должна быть приписана Архимеду. Ученые также спорят относительно авторства парадокса Аристотелева колеса. Везде, где это возможно, я упоминаю о таких спорах либо в основном тексте, либо в разделе **«Примечания и список дополнительной литературы»**.

Вы заметите, что значительное число важных открытий в математике было сделано в последние несколько десятилетий. Всего лишь один пример: в 2007 г. исследователи наконец «решили» проблему игры в шашки, доказав, что если один из соперников является идеальным игроком, то игра будет заканчиваться вничью. Как уже упоминалось, часть быстрых достижений в области математики за последние годы связана с использованием компьютеров, применяемых в качестве инструментов для математических экспериментов. В случае проблемы шашек, анализ игры фактически начался в 1989 г. и для полного решения потребовал использования десятков компьютеров. Игра в шашки имеет примерно 500 миллиардов миллиардов возможных позиций.

Изредка в основных статьях книги имеются ссылки на цитаты журналистов, пишущих о науке, либо известных исследователей, но из соображений краткости в статьях я не привожу список источников цитат или полных учетных данных конкретного автора. Я заранее прошу прощения за такой изредка встречающийся в книге компактный подход к цитированию, однако помочь в точной идентификации автора призваны ссылки на цитаты, приведенные конце книги.

Даже именование теорем может оказаться непростым делом. Например, математик Кит Девлин в 2005 г. написал в своей колонке для Американской математической ассоциации:

> *«Большинство математиков за свою жизнь доказывают большое количество теорем, и процесс, при котором их имя закрепляется за одной из теорем, является весьма бессистемным. Например, Эйлер, Гаусс и Ферма доказали сотни теорем каждый, многие из этих теорем являются очень важными, и все же их имена приписываются лишь нескольким из них. Иногда теоремы называют именами математиков неправильно. Самым известным случаем, пожалуй, является теорема Ферма: сам Ферма почти что наверняка не смог доказать «Великую теорему Ферма». Скорей всего, после смерти самого Ферма его имя было приписано кем-то другим к той гипотезе, которую французский математик набросал на полях книги. И теорема Пифагора была известна задолго до появления на исторической сцене самого Пифагора».*

В заключение отметим, что математические открытия служат основой для исследования природы реального мира, в то время как математические методы позволяют ученым делать предположения о нашей Вселенной: таким образом, открытия, описанные в этой книге, занимают подобающее им место среди наивысших достижений человечества.

На первый взгляд может показаться, что эта книга является длинным каталогом отдельных концепций и имен ученых-математиков с довольно слабой связью между ними. Но по мере прочтения книги, я думаю, вы сможете увидеть многочисленные связи, концептуально объединяющие эту книгу. Очевидно, что конечная цель ученых и математиков заключается не в простом накоплении фактов и формул: они стремятся понять закономерности, принципы организации и отношения между этими фактами для того, чтобы сформулировать теоремы и придать абсолютно новые направления ходу человеческой мысли. Во мне самом математика вызывает состояние восхищения природой ума, пределами мысли и нашим местом в этом огромном космосе.

Наш мозг, эволюционировавший от того органа, который заставлял нас убегать от львов по африканской саванне, возможно, не сконструирован так, чтобы проникнуть за бесконечную завесу реальности. Нам могут понадобиться математика, естественные науки, компьютеры, увеличение объема нашего мозга, и даже литература, искусство и поэзия, чтобы помочь откинуть этот занавес. Те из вас, кто собирается приступить к чтению книги **«Великая математика»** от корки до корки, – ищите взаимосвязи, взгляните с благоговением на эволюцию идей и отправляйтесь в самостоятельное плавание по бескрайнему морю воображения.

Благодарности

Я выражаю благодарность Тейе Крашек, Деннису Гордону, Нику Хобсону, Питу Барнсу и Марку Нандору за их ценные замечания и предложения. Я хотел бы также особо поблагодарить Мередит Хейл, редактора моей книги, а также Джоса Лейса, Тейю Крашек и Пауля Нюландера, которые позволили мне включить в книгу свои математические художественные работы. При исследовании памятных вех и поворотных моментов в истории математики, представленных в этой книге, я изучил широкий спектр прекрасных справочников и веб-сайтов, многие из которых перечислены в разделе **«Примечания и список дополнительной литературы»** в самом конце. Эти ссылки включают в себя: *MacTutor History of Mathematics Archive* (www-history.mcs.st-and.ac.uk), **«Википедия: свободная энциклопедия»** (en.wikipedia.org), **«Мир математики»** (mathworld.wolfram.com), книга Яна Гулльберга **«Математика: от появления чисел»**, книга Дэвида Дарлинга **«Универсальная книга математики»**, материалы Иварса Петерсона *Math Trek Archives* (www.maa.org/mathland/mathland_archives.html), книга Мартина Гарднера **«Математические игры»** (на CD-ROM, приобретенная через Американскую математическую ассоциацию), и некоторые из моих собственных книг, такие как **«Страсть к математике»**.

150 млн лет до н. э.

Шагомер у муравьев

Муравьи – общественные насекомые, произошедшие от веспоидных ос в середине мелового периода ок. 150 млн лет назад. После широкого распространения цветковых растений, т. е. ок. 100 млн лет назад, появилось множество разнообразных видов этих насекомых.

Муравьи-бегунки вида *Cataglyphis fortis* из пустыни Сахара в поисках еды проходят огромные расстояния по песчаным ландшафтам, часто полностью лишенным каких-либо визуальных ориентиров. Эти существа способны возвращаться к своему гнезду по кратчайшему пути, вместо того чтобы идти обратно по собственному следу. Они не только умеют определять направление по солнечному свету, но и, по-видимому, обладают неким встроенным «компьютером»-шагомером, подсчитывающим количество сделанных шагов и вычисляющим по нему пройденное расстояние. Муравей-бегунок может пройти до 50 м, пока не встретит мертвое насекомое, от которого он оторвет кусочек и понесет по прямому пути обратно в гнездо, вход в которое представляет собой отверстие диаметром обычно менее миллиметра.

Изменяя длину ног муравьев и тем самым удлиняя или укорачивая длину их шага, исследовательская группа немецких и швейцарских ученых подтвердила, что муравьи действительно определяют расстояние посредством «подсчета» шагов. К примеру, после того как муравьи достигали цели своего путешествия, их ноги удлиняли при помощи приклеенных подпорок или укорачивали посредством частичной ампутации. Затем исследователи возвращали их в ту же точку, из которой они были взяты, и муравьи начинали свой путь обратно к гнезду. Муравьи с удлиненными ногами проходили слишком далеко и пропускали вход в гнездо, а муравьи с подрезанными ногами, напротив, до него не доходили. Однако если муравьи *начинали* свой путь от гнезда с уже измененной длиной ног, они были способны вычислять расстояния правильно. Это позволяет заключить, что ключевым фактором, помешавшим муравьям в первом случае, стало изменение длины шага. Более того, сложнейший компьютер в мозгу у муравья позволяет ему вычислять величину, связанную с горизонтальной проекцией его пути, так что он не заблудится, даже если за время пути на его дороге нанесет песком новые холмы или долины.

СМ. ТАКЖЕ Счет у приматов (30 млн до н. э.), Цикады и простые числа (1 млн до н. э.).

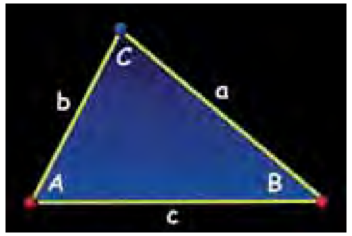
У муравьев-бегунков из пустыни Сахара имеется встроенный «шагомер», позволяющий им точно определять пройденное расстояние по числу сделанных шагов. Муравьи с приклеенными к ногам подпорками (красного цвета) проходят слишком далеко и пропускают вход в гнездо.

1427 г.

Теорема косинусов

Гияс ад-Дин Джамшид Мас‘уд ал-Каши (ок. 1380–1429),
Франсуа Виет (1540–1603)

Используя теорему косинусов, можно вычислить длину одной из сторон треугольника при условии, что известен угол, лежащий напротив этой стороны, и длины двух других сторон. Данная теорема может быть выражена соотношением $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, где a, b и c – длины сторон треугольника, а C – угол между сторонами a и b. Вследствие своего всеобщего характера эта теорема применяется во множестве областей – от геодезической съемки до вычисления траекторий полета воздушных судов.



Обратите внимание, что в случае прямоугольного треугольника теорема косинусов становится **теоремой Пифагора** ($c^2 = a^2 + b^2$), поскольку величина угла C в этом случае равна 90°, а его косинус равен нулю. Также отметим, что если известны длины всех трех сторон треугольника, то при помощи теоремы косинусов можно вычислить величины всех его углов.

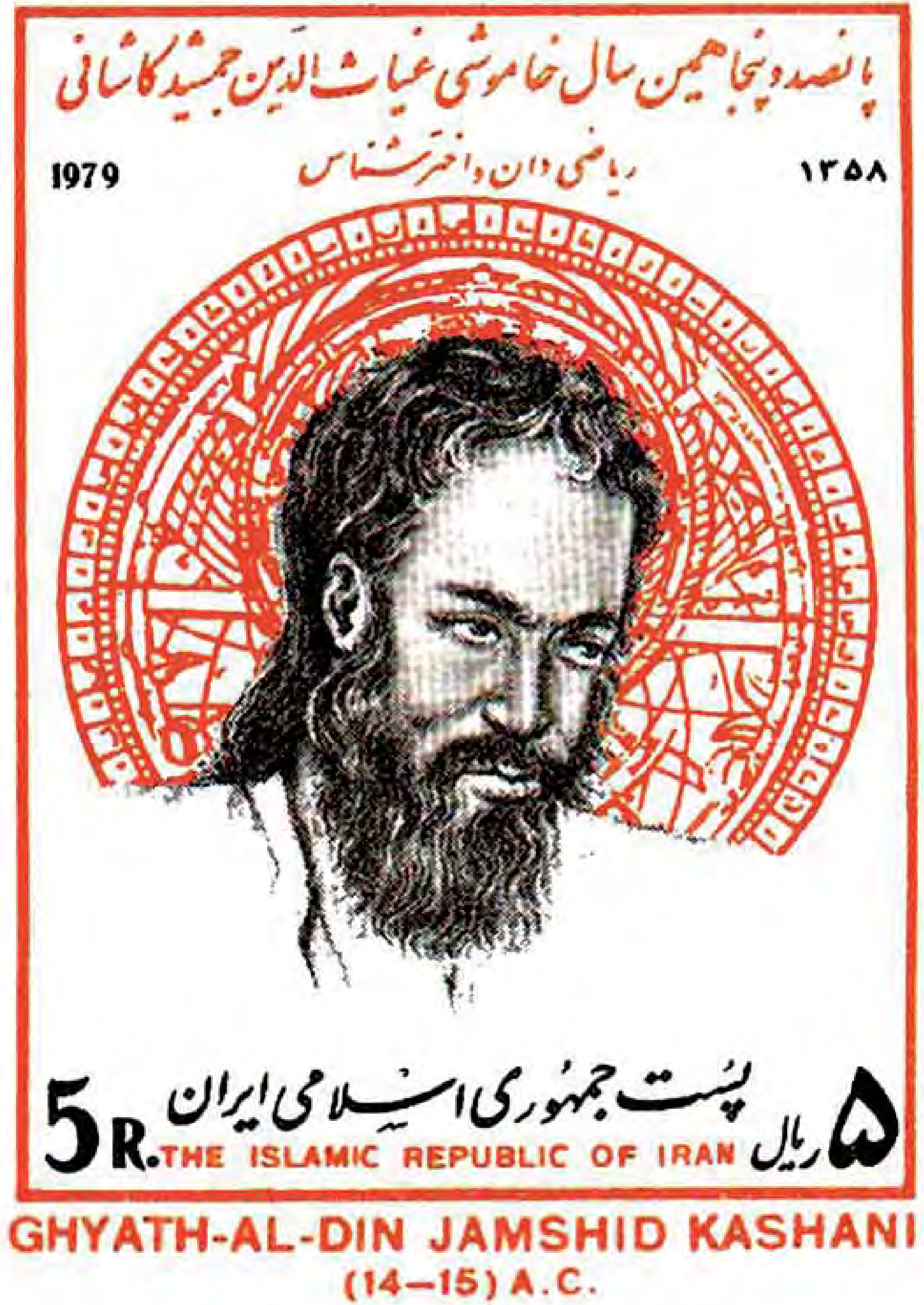
В **«Началах» Евклида** (ок. 300 г. до н. э.) имеются зачатки идей, ведущих к выводу теоремы косинусов. В XV столетии персидский астроном и математик ал-Каши составил строгие тригонометрические таблицы и сформулировал теорему в виде, приближенном к ее современному варианту. Французский математик Франсуа Виет в XVI в. пришел к теореме косинусов независимо от ал-Каши.

Во французском языке теорема косинусов называется «теоремой ал-Каши» (*Théorème d'Al-Kashi*) в знак признания его заслуг по объединению разрозненных результатов, связанных с этой теоремой. Наиболее значимая работа ал-Каши, «Ключ к арифметике», была завершена им в 1427 г. В ней подробно рассматриваются математические основы астрономии, картографии, зодчества и финансового учета. Ал-Каши использовал десятичные дроби для вычисления суммарной площади, которую занимают декоративные ячейки сотового свода (*мукарны*) – традиционные элементы исламской и персидской архитектуры.

Франсуа Виет прожил удивительную жизнь. Среди прочего, действуя по поручению короля Франции Генриха IV, Виет сумел расшифровать код, используемый агентами испанского короля Филлипа II. Филипп считал, что столь сложный шифр не может быть взломан обычным человеком, и потому когда он обнаружил, что его военные планы известны французам, пожаловался Папе Римскому, что против его страны используют черную магию.

СМ. ТАКЖЕ Теорема и треугольники Пифагора (600 до н. э.), «Начала» Евклида (300 до н. э.), «Альмагест» Птолемея (150), «Полиграфия» И. Тритемия (1518).

Иранская марка, выпущенная в 1979 г. в память об ал-Каши. Во французском языке теорема косинусов называется «теоремой ал-Каши» в знак признания его заслуг по объединению разрозненных результатов, связанных с этой теоремой.



1882 г.

Бутылка Клейна

Феликс Клейн (1849–1925)

Бутылка Клейна была впервые описана в 1882 г. немецким математиком Феликсом Клейном. Она представляет собой объект, в котором узкое горлышко бутылки заворачивается *внутрь* нее, образуя фигуру без внутренней и внешней стороны. Бутылка Клейна является близким родственником **ленты Мёбиуса** и теоретически может быть получена путем склеивания двух лент Мёбиуса вдоль краев. Один из способов построения несовершенной физической модели бутылки Клейна в нашей трехмерной вселенной состоит в том, чтобы пересечь ее с самой собой на небольшом круглом участке. Для того чтобы построить истинную бутылку Клейна без самопересечений, требуется четыре измерения.

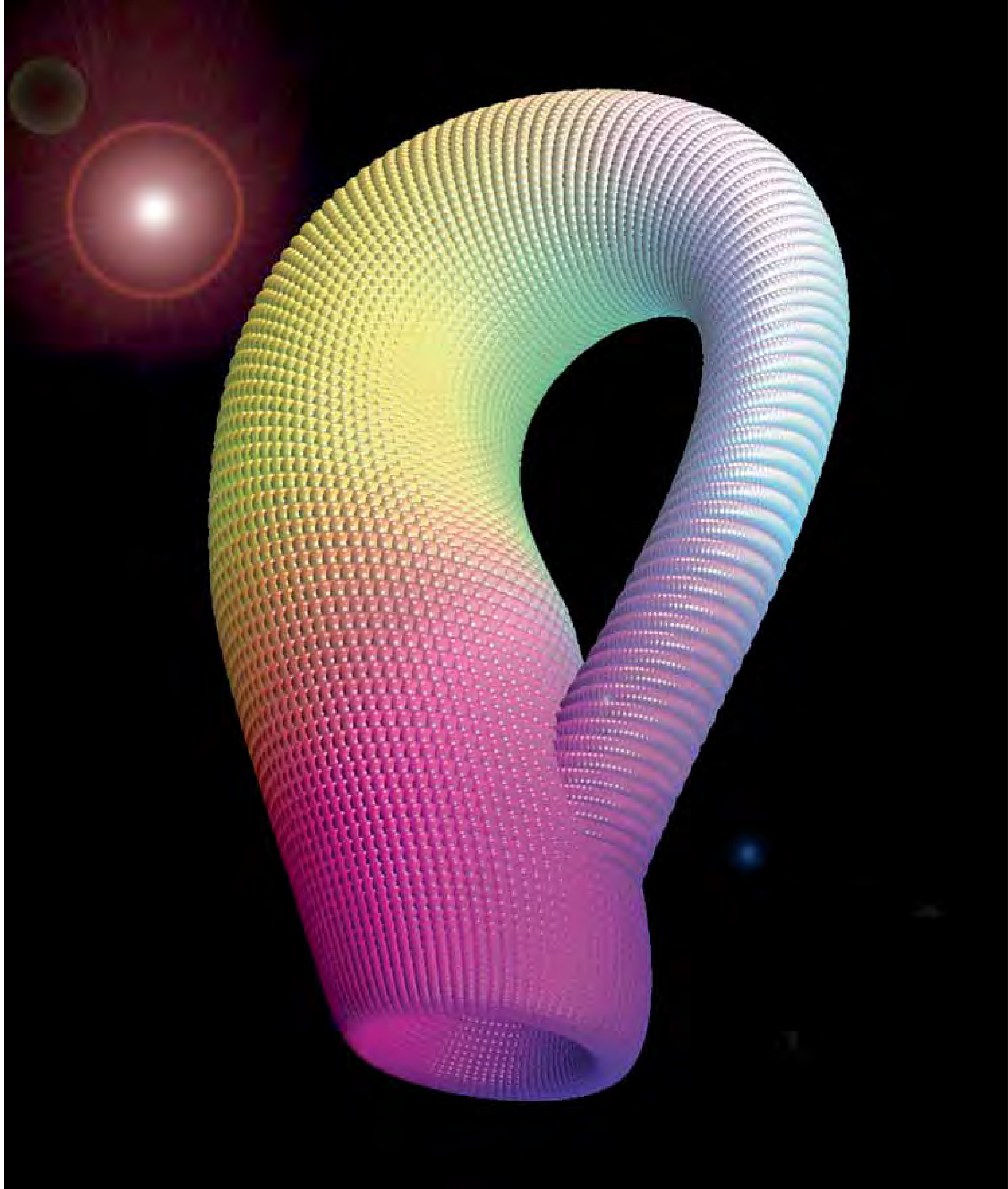
Вообразите, какое бы вас ждало разочарование, если бы вы попытались выкрасить одну лишь наружную сторону бутылки Клейна. Вы начинаете красить с того места, которое кажется выпуклой «наружной» поверхностью, и доходите до узкого горлышка. Четырехмерный объект не имеет самопересечений, тем самым позволяя вам продолжать двигаться по горлышку бутылки, которая теперь оказывается «внутри» нее. На том участке, где горлышко раскрывается, вновь переходя в выпуклую поверхность, вы обнаружите, что теперь красите внутреннюю полость бутылки. Если бы наша Вселенная имела форму бутылки Клейна, то существовал бы путь, пройдя вдоль которого, можно было обратить наши тела, например так, чтобы наши сердца оказались с правой стороны тела.

При поддержке Кингбриджского научного центра близ Торонто и компании *Killdee Scientific Glass*, занимающейся производством стекла для лабораторной посуды, астроном Клифф Столл создал самую большую в мире стеклянную модель бутылки Клейна. Кингбриджская бутылка Клейна имеет 43 дюйма (1,1 м) в высоту и 20 дюймов (50 см) в диаметре и состоит из 33 фунтов (15 кг) чистого боросиликатного стекла.

Заинтересованные необычными свойствами бутылки Клейна математики и любители головоломок часто изучают воможности игры в шахматы и прохождения лабиринтов на такого рода поверхностях. Если бы на бутылку Клейна была нанесена карта, то для того, чтобы никакие две области одного цвета на ней не граничили друг с другом, потребовалось бы шесть разных цветов.

СМ. ТАКЖЕ Минимальная поверхность (1774), Теорема о четырех красках (1852), Лента Мёбиуса (1858), Поверхность Боя (1901), Как вывернуть сферу наизнанку? (1958).

Бутылка Клейна имеет гибкое горлышко, которое заворачивается внутрь бутылки, образуя объект без раздельных внешней и внутренней сторон. Для того чтобы построить истинную бутылку Клейна без самопересечений, требуется четыре измерения.



1966 г.

Головоломка «Мгновенное умопомешательство»

Франк Армбрустер (р. 1929)

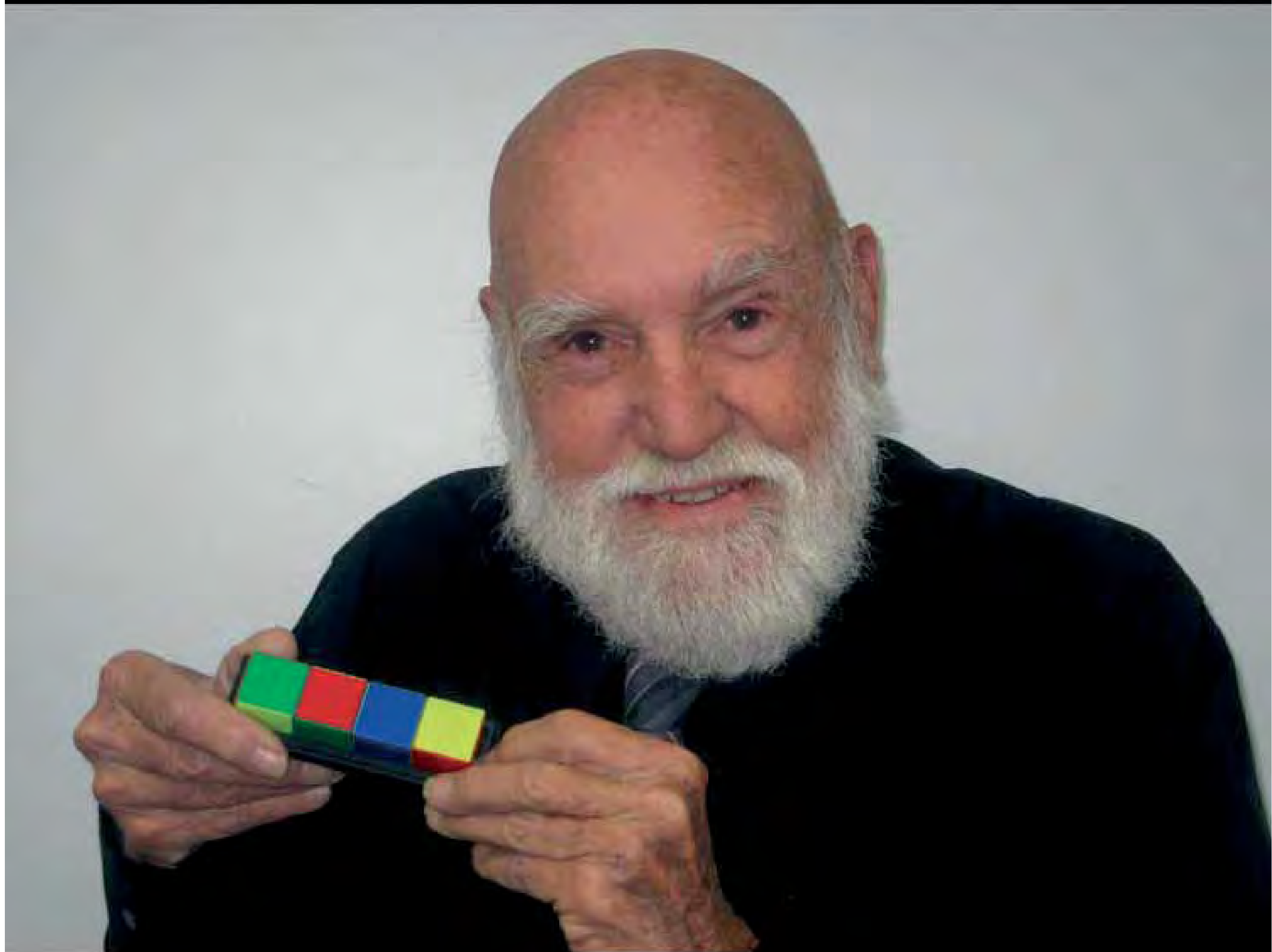
В детстве я никогда не мог собрать головоломку из кубиков под названием «Мгновенное умопомешательство» (*Instant Insanity*). Я не должен был сильно расстраиваться, потому что существует 41 472 различных способа для укладки этих четырех кубиков в ряд, и только 2 из них являются решением задачи. Методом проб и ошибок собрать кубики невозможно никогда.

Головоломка выглядит обманчиво просто и состоит из четырех кубиков, у которых каждая из шести граней раскрашена в один из четырех цветов. Раскраска каждого кубика индивидуальна. Цель состоит в том, чтобы выстроить эти четыре кубика в ряд так, чтобы каждая сторона ряда оказалась окрашенной только в один цвет. Поскольку у каждого кубика имеется 24 возможных ориентации, существует максимум $4! \times 24^4 = 7\,962\,624$ конфигураций. Однако это количество можно уменьшить до 41 472, потому что кубики могут быть уложены в любом порядке, при этом конечный результат не зависит от порядка расположения самих кубиков.

Чтобы понять эффективные способы решения этой головоломки, математики представили задачу в виде графа, вершинами которого являются 4 цвета граней кубиков. При таком подходе каждый кубик представлен графом, в котором вершины, соответствующие цветам противоположных граней, соединены ребром. По словам журналиста Ивара Петерсона, «тот, кто знаком с теорией графов, как правило, может найти решение в течение считанных минут. Эта головоломка служит изящным уроком в логическом мышлении».

Популярность головоломки «Мгновенное умопомешательство» резко возросла после того, как консультант по образовательной части Франк Армбрустер передал лицензию своей версии головоломки фирме *Parker Brothers*, которая продала более 12 млн наборов кубиков в конце 1960-х гг. Аналогичная головоломка из цветных кубиков была популярна примерно в 1900 г. и называлась *Great Tantalizer*. Армбрустер написал мне: «Когда в 1965 г. мне дали образец головоломки *Great Tantalizer*, я увидел возможность ее применения в образовательных целях. Мой первый образец был сделан из дерева с раскрашенными гранями. Следующий вариант этой головоломки был выполнен из пластика и упакован в коробку в сложенном виде. Когда я продавал его, один из покупателей предложил то название, которое я зарегистрировал в качестве торговой марки. Затем фирма *Parker Brothers* сделала мне предложение, от которого я не смог отказаться».

СМ. ТАКЖЕ «Теория игры в меледу» Луи Гро (1872), Пятнашки (1874), Ханойская башня (1883), Гекс (1942), Кубик Рубика (1974).



Франк Армбрустер, держащий свою знаменитую головоломку «Мгновенное умопомешательство». Чтобы расположить все четыре кубика в ряд, имеется 41 472 различных способа, и только два из них являются решением головоломки. В конце 1960-х гг. было продано более 12 миллионов комплектов головоломки «Мгновенное умопомешательство» (Instant Insanity).

1970 г.

Дональд Кнут и игра «Быки и коровы»

Дональд Эрвин Кнут (р. 1938), **Мордехай Мейровиц** (р. 1922–1927)

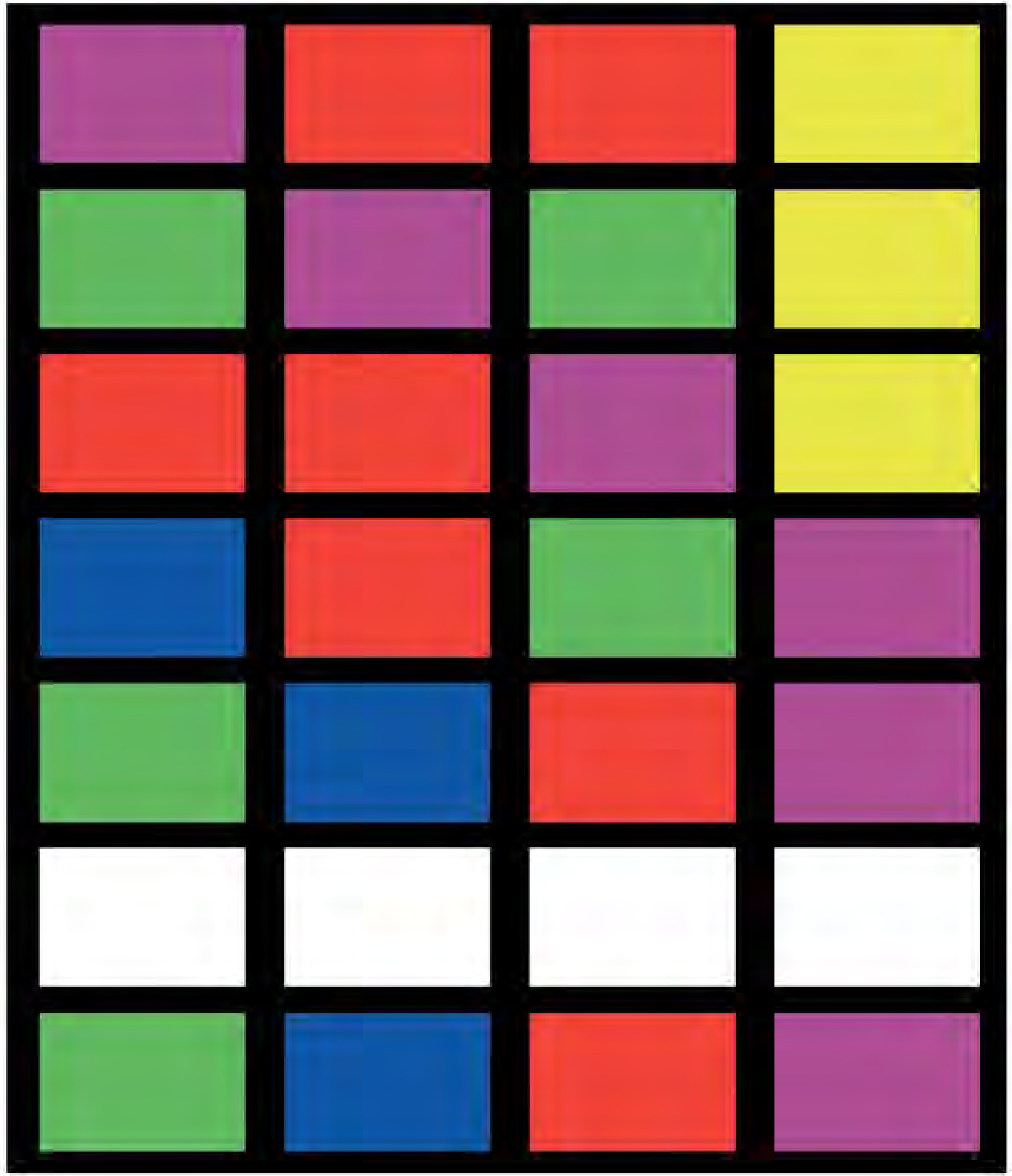
«Быки и коровы» — это настольная игра по взламыванию шифра, которую изобрел в 1970 г. М. Мейровиц, израильтянин-почтальон и специалист в области телекоммуникаций. Основные компании, выпускающие игры, отвергли предложение Мейровица, поэтому он договорился о продаже своей игры с небольшой английской компанией *Invicta Plastics*. Игра разошлась тиражом более 50 млн экземпляров, что сделало ее самой успешной игрой 1970-х гг.

Согласно правилам, один из игроков — шифровальщик — выбирает последовательность четырех цветных колышков, каждый из которых может быть выкрашен в один из шести цветов. Противник должен угадать последовательность, которую загадал шифровальщик, сделав при этом по возможности наименьшее количество предположений. Каждое предположение должно быть представлено в виде последовательности из 4 цветных колышков. Шифровальщик подсказывает, сколько колышков имеют правильный цвет и находятся в правильном порядке («быки»), и сколько колышков имеют правильный цвет, но стоят в неправильном порядке («коровы»). Например, секретный код может быть последовательностью «зеленый-белый-синий-красный». Другой игрок может сделать предположение, что кодом является «оранжевый-желтый-синий-белый». В этом случае шифровальщик подсказывает, что у другого игрока один «бык» и одна «корова», но не упоминает конкретные названия цветов. Игра продолжается, при этом другой игрок делает все новые предположения о правильном коде. Шифровальщик может выбрать секретный шифр из общего количества 6^4 (или 1206) возможных комбинаций в предположении, что 6 цветных колышков устанавливаются в 4 позициях.

Игра «Быки и коровы» имела важное значение, отчасти в связи с длительными ее исследованиями, которые велись с момента выхода игры на рынок. В 1977 г. американский ученый Д. Кнут опубликовал стратегию, которая позволяет игроку всегда угадать правильный код за 5 попыток. Эта стратегия была первым известным алгоритмом решения игры «Быки и коровы», после чего было опубликовано большое количество работ по этой теме. В 1993 г. Кэндзи Коямa и Тони В. Лай опубликовали стратегию, в которой в самом худшем случае требовалось максимум 6 попыток, но со средним числом попыток, равным всего лишь 4,340. В 1996 г. Жи Сян Чен и его коллеги обобщили предыдущие результаты на случай, когда имеется n цветных колышков, стоящих в m положениях. Также игру несколько раз исследовали с использованием генетических алгоритмов – методов, инспирированных эволюционной биологией.

СМ. ТАКЖЕ Крестики-нолики (1300 до н. э.), Го (548 до н. э.), Головоломка «Вечность» (1999), Решение игры «Овари» (2002), Решение игры в шашки (2007).

Схематическое изображение игры «Быки и коровы». В данном случае скрытым кодом, показанным внизу, является код «зеленый-синий-красный-сиреневый». Игрок начинает с предположения о коде в верхней части доски и за пять ходов после получения подсказок от соперника находит правильное решение.



1975 г.

Фракталы

Бенуа Мандельброт (1924–2010)

В наши дни фрактальные узоры, выполненные с помощью компьютерной графики, можно встретить где угодно. Среди ученых и, что довольно неожиданно, среди художников и дизайнеров продолжает расти интерес к фрактальным картинам, от волнистых узоров на компьютерных художественных постерах до иллюстраций в самых серьезных физических журналах. Слово «фрактал» было придумано в 1975 г. математиком Бенуа Мандельбротом для описания набора кривых сложного вида, многие из которых нельзя было увидеть до появления компьютеров с их способностью к быстрому выполнению больших объемов вычислений. Фракталы часто проявляют самоподобие, которое предполагает, что в каком-либо исходном объекте можно найти в уменьшенном масштабе различные точные или неточные копии данного объекта. Детали объекта продолжают воспроизводиться с разными степенями увеличений, подобно тому, как бесконечно вкладываются одна в другую русские матрешки. Некоторые из этих форм существуют только в абстрактном геометрическом пространстве, но другие могут быть использованы в качестве моделей для сложных природных объектов, таких как береговые линии и ветвления кровеносных сосудов. Завораживающие компьютерные изображения могут возбудить и мотивировать интерес учащихся к математике в большей степени, чем любые другие математические открытия прошлого века.

Физики проявляют к фракталам большой интерес, потому что они иногда могут описать хаотическое поведение реальных явлений, таких как планетарное движение, поток жидкости, диффузию лекарств, поведение межотраслевых отношений и вибрацию крыльев самолета. (Хаотическое поведение часто создает фрактальные картины.) По традиции, когда физики или математики наблюдали сложные результаты, они часто искали сложные причины. В противоположность этому, многие фрактальные формы раскрывают фантастически сложный характер простейших формул.

В число ранних исследователей фрактальных объектов входил Карл Вейерштрасс, который в 1872 г. рассматривал функции, которые были повсюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы, и Хельге фон Кох, который в 1904 г. изучал такие геометрические формы, как **снежинка Коха**. В XIX в. и начале XX в. несколько математиков изучали фракталы в комплексной плоскости, однако не смогли в полной мере оценить или визуализировать эти объекты без помощи компьютера.

СМ. ТАКЖЕ «Геометрия» Декарта (1637), Треугольник Паскаля (1654), Функции Вейерштрасса (1872), Кривая Пеано (1890), Снежинка Коха (1904), Последовательность Морса–Туэ (1906), Размерность Хаусдорфа (1918), Ожерелье Антуана (1920), Рогатая сфера Александера (1924), Губка Менгера (1926), Парадокс береговой линии (1950), Хаос и эффект бабочки (1963), Множество Мандельброта (1980).

Фрактальные структуры в изображении Джоса Лейса часто демонстрируют самоподобие, которое предполагает, что различные структурные темы повторяются в различных масштабах размеров.

КЛИФФОРД ПИКОВЕР (р. 1957) учился и получил PhD на факультете молекулярной биофизики и биохимии Йельского университета. Он — автор более семидесяти патентов и более сорока книг, переведенных на двенадцать языков мира. Темы их самые разнообразные — от естествознания и математики до научной фантастики, вопросов религии, искусства и истории. Пиковер сотрудничает с несколькими научными и научно-популярными журналами. Его исследования всегда привлекают широкое внимание средств массовой информации начиная с *CNN*, *WIRED* и кончая *The New York Times*, а у его сайта www.pickover.com миллионы посетителей.

250 важнейших вех в истории математики, включая:

Шагомер у муравьев (150 млн лет до н. э.) • Узлы (100 000 лет до н. э.) • Кость Ишанго (18 000 лет до н. э.) • Магические квадраты (2200 г. до н. э.) • Теорема и треугольники Пифагора (600 г. до н. э.) • Апории Зенона (445 г. до н. э.) • «Начала» Евклида (300 г. до н. э.) • Счёты (1200) • Золотое сечение (1509) • Логарифмы (1614) • Логарифмическая линейка (1621) • Треугольник Паскаля (1654) • Создание математического анализа (1665) • Кривая нормального распределения (1733) • Основная теорема алгебры (1797) • Барицентрическое исчисление (1827) • Лента Мёбиуса (1858) • Гипотеза Римана (1859) • «Флатландия» (1884) • Доказательство теоремы о распределении простых чисел (1896) • Теорема о волосатом шаре (1912) • Теорема о бесконечных обезьянах (1913) • Геодезический купол (1922) • Бурбаки: тайное общество (1935) • Хаос и эффект бабочки (1963) • Нечеткая логика (1965) • Кубик Рубика (1974) • Фракталы (1975) • Энциклопедия целочисленных последовательностей (1996) • NP-полнота игры «Тетрис» (2002) • Решение игры в шашки (2007) • Математическая гипотеза Вселенной (2007)

Клиффорд Пиковер, блестящий писатель и бесспорный эрудит, собрал воедино факты из истории математики в эту замечательную обзорную работу. Его 250 коротких статей дают представление о настоящей истории математики, сосредотачивая внимание на самых важных теоремах и их гениальных ученых-первооткрывателях ... Огромная любовь автора к математике и его благоговение перед ее тайнами пронизывают каждую страницу этой прекрасной книги. Только одни лишь иллюстрации к ней стоят целой отдельной книги.

Мартин Гарднер

Пиковер рассказывает о таинственных мирах, стоящих за известной нам реальностью.

The New York Times

Клиффорд Пиковер — сегодня один из самых глубоких и оригинальных мыслителей в мире.

Journal of Recreational Mathematics

Книга Пиковера несомненно расширит кругозор любого человека.

Артур С. Кларк

Бакки Фуллер — гениален, Артур С. Кларк — тоже, но Клиф Пиковер превосходит их обоих.

WIRED