

ВМК МГУ – ШКОЛЕ



Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов,
Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

ОСНОВНОЙ КУРС с решениями и указаниями

ЕГЭ
ОЛИМПИАДЫ
ЭКЗАМЕНЫ в ВУЗ

АЛГЕБРА



Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов,
Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

АЛГЕБРА

ОСНОВНОЙ КУРС

с решениями и указаниями

Учебно-методическое пособие

Под редакцией
М. В. Федотова



Москва
Лаборатория знаний

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Алгебра. Основной курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : Лаборатория знаний, 2018. — 576 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

ISBN 978-5-00101-139-2

Настоящее пособие составлено на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова и задач Единого государственного экзамена преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729

Учебное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Попов Юрий Александрович
Семендяева Наталья Леонидовна
Федотов Михаил Валентинович

АЛГЕБРА.
ОСНОВНОЙ КУРС С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ
Учебно-методическое пособие

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*

Подписано в печать 03.11.17. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 46,80. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, <http://www.pilotLZ.ru>

ISBN 978-5-00101-139-2

© Золотарёва Н. Д., Попов Ю. А.,
Семендяева Н. Л., Федотов М. В.,
2018
© Лаборатория знаний, 2018

Оглавление

| | |
|------------------------|---|
| От редактора | 7 |
| Предисловие | 8 |

Часть I. Теория и задачи 11

| | |
|--|----|
| 1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства | 11 |
| 1.1. Формулы сокращённого умножения, преобразование алгебраических выражений | 11 |
| 1.2. Сравнение чисел | 14 |
| 1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем | 15 |
| 1.4. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета | 19 |
| 2. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, простейшие системы уравнений | 23 |
| 2.1. Рациональные уравнения и неравенства, метод интервалов | 23 |
| 2.2. Простейшие системы уравнений. Подстановка и исключение переменных при решении систем уравнений | 26 |
| 2.3. Радикалы. Иррациональные уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 29 |
| 2.4. Смешанные задачи | 33 |
| 3. Преобразование тригонометрических выражений, стандартные тригонометрические уравнения | 34 |
| 3.1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, формулы двойного и половинного аргументов | 34 |
| 3.2. Простейшие тригонометрические уравнения. Разложение на множители, сведение к квадратному уравнению | 37 |
| 3.3. Применение тригонометрических формул для сведения уравнений к простейшим | 40 |
| 3.4. Различные задачи на отбор корней | 44 |
| 4. Стандартные текстовые задачи | 46 |
| 4.1. Пропорциональные величины | 46 |
| 4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии | 48 |
| 4.3. Скорость, движение и время | 51 |
| 4.4. Работа и производительность | 55 |
| 4.5. Проценты, формула сложного процента | 56 |
| 5. Стандартные показательные и логарифмические уравнения и неравенства | 58 |
| 5.1. Преобразование логарифмических выражений. Сравнение логарифмических и показательных значений | 58 |
| 5.2. Простейшие показательные уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 62 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 5.3. | Простейшие логарифмические уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 66 |
| 5.4. | Смешанные задачи | 70 |
| 6. | Линейные и однородные тригонометрические уравнения, системы тригонометрических уравнений, использование ограниченности тригонометрических функций | 71 |
| 6.1. | Линейные тригонометрические уравнения, метод вспомогательного аргумента | 71 |
| 6.2. | Однородные тригонометрические уравнения второй степени, замена тригонометрических выражений | 74 |
| 6.3. | Системы тригонометрических уравнений | 77 |
| 6.4. | Использование ограниченности тригонометрических функций, оценочные неравенства | 82 |
| 7. | Изображение множества точек на координатной плоскости, использование графических иллюстраций в уравнениях и неравенствах различных типов | 86 |
| 7.1. | Геометрические места точек, графики функций, правила линейных преобразований графиков | 86 |
| 7.2. | Плоские геометрические фигуры, применение метода координат | 91 |
| 7.3. | Использование графических иллюстраций при решении уравнений и неравенств | 93 |
| 8. | Элементы математического анализа | 96 |
| 8.1. | Производная, её геометрический и физический смысл. Производные элементарных функций, основные правила дифференцирования функций | 96 |
| 8.2. | Исследование функций с помощью производной | 100 |
| 8.3. | Первообразные элементарных функций, основные правила нахождения первообразных. Вычисление площади плоской фигуры с помощью первообразной | 104 |
| 9. | Текстовые задачи | 108 |
| 9.1. | Скорость, движение и время | 108 |
| 9.2. | Арифметическая и геометрическая прогрессии | 110 |
| 9.3. | Концентрация, смеси и сплавы, массовые и объёмные доли | 113 |
| 9.4. | Целые числа, перебор вариантов, отбор решений | 116 |
| 10. | Раскрытие модулей в уравнениях и неравенствах различных видов | 119 |
| 10.1. | Различные приёмы раскрытия модулей, системы уравнений и неравенств с модулями | 119 |
| 10.2. | Раскрытие модулей в тригонометрических уравнениях | 124 |
| 10.3. | Раскрытие модулей в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах | 127 |
| 11. | Разложение на множители и расщепление в уравнениях и неравенствах различных видов | 129 |
| 11.1. | Понятие расщепления, равносильные преобразования | 129 |
| 11.2. | Расщепление в тригонометрических уравнениях и неравенствах | 132 |
| 11.3. | Расщепление в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах, модифицированный метод интервалов | 136 |
| 11.4. | Смешанные задачи | 140 |

| | |
|--|------------|
| Часть II. Указания и решения | 143 |
| 1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства | 143 |
| 1.1. Формулы сокращённого умножения, преобразование алгебраических выражений | 143 |
| 1.2. Сравнение чисел | 149 |
| 1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем | 154 |
| 1.4. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета | 160 |
| 2. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, простейшие системы уравнений | 168 |
| 2.1. Рациональные уравнения и неравенства, метод интервалов | 168 |
| 2.2. Простейшие системы уравнений. Подстановка и исключение переменных при решении систем уравнений | 179 |
| 2.3. Радикалы. Иррациональные уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 184 |
| 2.4. Смешанные задачи | 199 |
| 3. Преобразование тригонометрических выражений, стандартные тригонометрические уравнения | 218 |
| 3.1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента, формулы двойного и половинного аргументов | 218 |
| 3.2. Простейшие тригонометрические уравнения. Разложение на множители, сведение к квадратному уравнению | 223 |
| 3.3. Применение тригонометрических формул для сведения уравнений к простейшим | 232 |
| 3.4. Различные задачи на отбор корней | 243 |
| 4. Стандартные текстовые задачи | 256 |
| 4.1. Пропорциональные величины | 256 |
| 4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии | 259 |
| 4.3. Скорость, движение и время | 271 |
| 4.4. Работа и производительность | 281 |
| 4.5. Проценты, формула сложного процента | 285 |
| 5. Стандартные показательные и логарифмические уравнения и неравенства | 290 |
| 5.1. Преобразование логарифмических выражений. Сравнение логарифмических и показательных значений | 290 |
| 5.2. Простейшие показательные уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 298 |
| 5.3. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства, равносильные преобразования | 311 |
| 5.4. Смешанные задачи | 329 |
| 6. Линейные и однородные тригонометрические уравнения, системы тригонометрических уравнений, использование ограниченности тригонометрических функций | 343 |
| 6.1. Линейные тригонометрические уравнения, метод вспомогательного аргумента | 343 |

| | | |
|-------|--|------------|
| 6.2. | Однородные тригонометрические уравнения второй степени, замена тригонометрических выражений | 351 |
| 6.3. | Системы тригонометрических уравнений | 356 |
| 6.4. | Использование ограниченности тригонометрических функций, оценочные неравенства | 371 |
| 7. | Изображение множества точек на координатной плоскости, использование графических иллюстраций в уравнениях и неравенствах различных типов | 380 |
| 7.1. | Геометрические места точек, графики функций, правила линейных преобразований графиков | 380 |
| 7.2. | Плоские геометрические фигуры, применение метода координат | 388 |
| 7.3. | Использование графических иллюстраций при решении уравнений и неравенств | 397 |
| 8. | Элементы математического анализа | 408 |
| 8.1. | Производная, её геометрический и физический смысл. Производные элементарных функций, основные правила дифференцирования функций | 408 |
| 8.2. | Исследование функций с помощью производной | 411 |
| 8.3. | Первообразные элементарных функций, основные правила нахождения первообразных. Вычисление площади плоской фигуры с помощью первообразной | 419 |
| 9. | Текстовые задачи | 425 |
| 9.1. | Скорость, движение и время | 425 |
| 9.2. | Арифметическая и геометрическая прогрессии | 433 |
| 9.3. | Концентрация, смеси и сплавы, массовые и объёмные доли | 441 |
| 9.4. | Целые числа, перебор вариантов, отбор решений | 450 |
| 10. | Раскрытие модулей в уравнениях и неравенствах различных видов | 460 |
| 10.1. | Различные приёмы раскрытия модулей, системы уравнений и неравенств с модулями | 460 |
| 10.2. | Раскрытие модулей в тригонометрических уравнениях | 472 |
| 10.3. | Раскрытие модулей в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах | 482 |
| 11. | Разложение на множители и расщепление в уравнениях и неравенствах различных видов | 492 |
| 11.1. | Понятие расщепления, равносильные преобразования | 492 |
| 11.2. | Расщепление в тригонометрических уравнениях и неравенствах | 504 |
| 11.3. | Расщепление в показательных и логарифмических уравнениях и неравенствах, модифицированный метод интервалов | 520 |
| 11.4. | Смешанные задачи | 534 |
| | Варианты ДВИ МГУ последних лет | 555 |
| | Ответы | 562 |
| | Список литературы | 576 |

От редактора

Уважаемый читатель, Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета Вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии и физике. По каждому предмету вышли два пособия: основной курс и углубленный курс, содержащий сложные задачи единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М. В. Ломоносова). Основной курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач первой части ЕГЭ и некоторых задач второй части, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Углубленный курс содержит задачи, научившись решать которые, вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

В серии «ВМК МГУ – школе» вышли два пособия по информатике. Первое рекомендуется в качестве пособия при подготовке к ЕГЭ по информатике и ИКТ. Разделы этого пособия соответствуют темам, включенным в ЕГЭ. Второе – пособие по программированию – поможет вам подготовиться к экзамену по информатике, научиться решать задачи по программированию на языке Паскаль.

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет значительно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу. **Второй особенностью** наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

*Заместитель декана по учебной работе
факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
М. В. Федотов*

Предисловие

До 2017 года «основной курс» назывался «базовым курсом», но в связи с разделением ЕГЭ на базовый и профильный уровни, во избежание путаницы наш «базовый курс» был переименован в «основной курс».

«Основной курс» рассчитан на закрепление школьного материала по алгебре и приобретение навыков, необходимых для решения задач ЕГЭ и стандартных задач вступительных экзаменов в вуз.

Предлагаемый курс изначально не предполагает знаний, выходящих за рамки базовой школьной программы. Все приёмы, необходимые для решения задач, демонстрируются по ходу изучения материала.

Задачи в разделах расположены по принципу «от простого – к сложному». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если Вам не удалось получить правильный ответ или у Вас возникли сомнения в правильности Вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

При составлении пособия авторы придерживались спиралевидного принципа подачи материала: сначала предлагаются простые задачи по всем основным разделам математики и методы их решения, затем рассматриваются более сложные задачи, для решения которых требуются более сложные методы или их комбинации. Это позволяет не только закрепить, но и осмыслить на новом уровне уже пройденный материал. Такая схема обучения с успехом применяется на очных и дистанционных подготовительных курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения.

Запись (У) после номера задачи означает, что задача предлагалась на устном экзамене по математике в МГУ.

Для задач письменного экзамена сначала идет сокращенное название факультета, затем – год, в котором была задача (если после года в скобках идет цифра 1 или 2 – это значит, что эта задача была на весенней олимпиаде факультета; на мехмате и физфаке весной проходили две олимпиады; на ВМК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения – одна олимпиада весной). После точки идет номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМК-98.3) означает, что задача была в 1998 году летом на вступительных экзаменах на факультете ВМК, третьим номером в варианте, а (М/м-97(2).1) означает, что задача была в 1997 году на второй весенней олимпиаде механико-математического факультета первым номером в варианте.

Сокращения названий факультетов, принятые в данной книге

М/м – механико-математический факультет,
 ВМК – факультет Вычислительной математики и кибернетики (.Б – отделение бакалавров по прикладной математике, .И – отделение бакалавров по информационным технологиям),
 Физ – физический факультет,
 Хим – химический факультет,
 ВКНМ – Высший колледж наук о материалах,
 ФНМ – факультет наук о материалах (до 2000 года – ВКНМ)
 Биол – биологический факультет,
 Почв – факультет почвоведения,
 Геол – геологический факультет (.ОГ – отделение общей геологии),
 Геогр – географический факультет,
 Экон – экономический факультет (.М – отделение менеджмента, .К – отделение экономической кибернетики, .В – вечернее отделение),
 ВШБ – Высшая школа бизнеса,
 Псих – факультет психологии,
 Фил – философский факультет,
 Филол – филологический факультет,
 Соц – социологический факультет,
 ИСАА – Институт стран Азии и Африки,
 ФГУ – факультет государственного управления (отделение «Антикризисное управление»),
 ЧФ – Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь).

Используемые обозначения

$\{a\}$ – множество, состоящее из одного элемента a ;
 \cup – объединение; \cap – пересечение; \emptyset – пустое множество;
 \in – знак принадлежности; \subset – знак включения подмножества;
 \forall – для любого; $A \setminus B$ – разность множеств A и B ;
 \implies – следовательно; \iff – тогда и только тогда;
 \mathbb{N} – множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
 \mathbb{Z} – множество всех целых чисел;
 \mathbb{Q} – множество всех рациональных чисел;
 \mathbb{R} – множество всех действительных чисел;
 ОДЗ – область допустимых значений;
 $\left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$ – знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;
 $\left[\begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$ – знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Теория и задачи

1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства

1.1. Формулы сокращённого умножения, преобразование алгебраических выражений

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, при решении которых используются различные полезные формулы и преобразования: формулы сокращённого умножения, выделение полного квадрата, домножение на сопряжённое выражение.

Необходимо знать и уметь применять следующие формулы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (1)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (2)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (3)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad (4)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \quad (5)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (6)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \quad (7)$$

причём все формулы нужно узнавать не только «слева направо», но и «справа налево».

Применение формул сокращённого умножения является одним из самых простых способов разложения алгебраического выражения на множители. Все формулы справедливы при любых вещественных a и b , которые сами могут являться числами, функциями или другими выражениями.

Помимо основных формул сокращённого умножения полезно знать и формулы для большего числа слагаемых, например:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

В общем случае: квадрат суммы нескольких чисел есть сумма квадратов этих чисел плюс сумма всевозможных удвоенных попарных произведений.

Полезно знать также две следующие формулы, верные $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-98.1) Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2 - 16b^2}{4b + 3a} - \frac{a^2b - 3ab^2}{ab} \right)^2 : \left(6ab - \frac{8a^3 - b^3}{2a - b} \right).$$

Решение. Согласно формулам (1) и (5)

$$9a^2 - 16b^2 = (3a - 4b)(3a + 4b), \quad 8a^3 - b^3 = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2).$$

Последовательно преобразуем исходное выражение:

$$\left(\frac{(3a - 4b)(3a + 4b)}{4b + 3a} - \frac{ab(a - 3b)}{ab} \right)^2 : \left(6ab - \frac{(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)}{2a - b} \right) =$$

$$= (3a - 4b - a + 3b)^2 : (6ab - 4a^2 - 2ab - b^2) = (2a - b)^2 : (4a^2 - 4ab + b^2) \cdot (-1) = -1.$$

Отметим, что выражение имеет смысл только при $4b + 3a \neq 0$, $ab \neq 0$, $2a \neq b$.

Ответ. -1 при $4b + 3a \neq 0$, $ab \neq 0$, $2a \neq b$.

Пример 2. (М/М-78.1) Выражение $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ является целым числом. Найти это целое число.

Решение. *Первый способ.* Выделим полные квадраты в подкоренных выражениях:

$$\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} = \sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57} =$$

$$= \sqrt{32 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5 + 25} - \sqrt{32 + 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5 + 25} = \sqrt{(4\sqrt{2} - 5)^2} - \sqrt{(4\sqrt{2} + 5)^2} =$$

$$= |4\sqrt{2} - 5| - (4\sqrt{2} + 5) = 4\sqrt{2} - 5 - 4\sqrt{2} - 5 = -10.$$

Замечание. Коэффициенты полных квадратов можно найти методом неопределённых коэффициентов (ищем $a, b \in \mathbb{N}$):

$$57 + 40\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^2 = (a^2 + 2b^2) + 2ab\sqrt{2}.$$

Получаем систему уравнений $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 57, \\ ab = 20; \end{cases}$ значит, $b \in \{1; 2; 4; 5\}$, число a —

нечётное. Подходит пара $a = 5$, $b = 4$; следовательно, $57 + 40\sqrt{2} = (5 + 4\sqrt{2})^2$.

Аналогично $57 - 40\sqrt{2} = (5 - 4\sqrt{2})^2$.

Второй способ. Примем числовое значение выражения за параметр и решим соответствующее уравнение.

Обозначим за A выражение $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$; тогда $A < 0$, так как первый радикал меньше второго.

Возведём обе части в квадрат:

$$A^2 = 57 - 40\sqrt{2} + 57 + 40\sqrt{2} - 2\sqrt{(57 - 40\sqrt{2}) \cdot (57 + 40\sqrt{2})} \iff$$

$$\iff A^2 = 114 - 2\sqrt{57^2 - 1600 \cdot 2} \iff A^2 = 100 \iff A = \pm 10.$$

Значит, $A = -10$.

О т в е т. -10 .

Задачи

- (ЕГЭ) Найти значение выражения $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + ab}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right) : \sqrt{\frac{a}{a+b}}$ при $a = 4$, $b = 5$.
- (ЕГЭ) Найти значение выражения $\frac{2}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} - \frac{2\sqrt{p}}{p - q}$ при $p = 8$, $q = 9$.
- (ЕГЭ) Сократить дробь $\frac{a - 81b}{\sqrt{a} - 9\sqrt{b}}$.
- (ЕГЭ) Сократить дробь $\frac{a + 27b}{\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{b}}$.
- (Геол-93.1) Найти численное значение выражения $\left(\frac{8a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{4\sqrt{a} + 2\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{4\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{4a - b}\right)^2$.
- (Почв-98(1).1) Упростить выражение $\left(\frac{\sqrt{2a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{b}}{\sqrt{2a} - \sqrt{b}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{b}{4a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.
- (Псих-84.1) Вычислить, не используя калькулятор $\left(\frac{3\left(\frac{17}{90} - 0, 125 : 1\frac{1}{8}\right) : 480}{(7 : 1, 8 - 2\frac{1}{3} : 1, 5) : 2\frac{2}{3}}\right)^{-1} : \left(\frac{679 \cdot 10^{-2}}{0, 7} + 0, 3\right)$.
- (ЕГЭ) Вычислить $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.
- (ЕГЭ) Выражение $\sqrt{3} - \sqrt{8} - \sqrt{2}$ является целым числом. Найти его.
- (Почв-96.1) Доказать, что число $\left((\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27})^2 + 7\right) \cdot \left((\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{27})^2 - 7\right)$ целое, и найти его.

11. (ЕГЭ) Упростите до целого числа выражение $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.
12. (МГУ-48.3) Выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$ является целым числом. Найдите это целое число.
13. (МГУ-48.2) Выражение $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ является целым числом. Найдите это целое число.
14. (ИСАА-99.2) Упростив выражение $A = \frac{3ab - b\sqrt{ab} + a\sqrt{ab} - 3b^2}{\sqrt{2^{-2}(ab^{-1} + a^{-1}b)} - 0,5} - 2ab - 6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, где $a > b > 0$ – действительные числа, выяснить, что больше: A или $0,01$?

1.2. Сравнение чисел

Теоретический материал

В этом разделе собраны простейшие задачи на сравнение чисел. В большинстве случаев достаточно сгруппировать подходящим образом слагаемые и возвести обе части неравенства в нужную степень. При этом в чётную степень можно возводить только неотрицательные величины.

Примеры решения задач

Пример 1. (У) Доказать, что $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$.

Решение. Для того чтобы избавиться от квадратных корней, будем возводить в квадрат. Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то можем возвести их в квадрат:

$$5 + 2\sqrt{6} < 10 \iff 2\sqrt{6} < 5.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, получим очевидное неравенство $24 < 25$. Следовательно, исходное неравенство также справедливо.

Пример 2. (У) Выяснить, что больше: $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[5]{5}$?

Решение. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{3} \vee \sqrt[5]{5}$$

и будем сводить его к очевидному неравенству с помощью алгебраических преобразований. Для того чтобы избавиться от радикалов, надо возвести обе части неравенства в пятнадцатую степень:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} &\vee \left(\sqrt[5]{5}\right)^{15} \\ 3^5 &\vee 5^3 \\ 243 &> 125. \end{aligned}$$

Поскольку не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{5}$.

Ответ. $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{5}$.

Пример 3. (Экон-88.1) Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ или 3?

Решение. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt{2} \vee 3$$

и будем работать с ним как с обычным, исключив преобразования, меняющие его знак. Возведём обе части неравенства $\sqrt[3]{4} \vee 3 - \sqrt{2}$ в куб:

$$\begin{aligned} 4 &\vee (3 - \sqrt{2})^3 = 45 - 29\sqrt{2} \\ 29\sqrt{2} &\vee 41. \end{aligned}$$

Теперь возведём обе части неравенства в квадрат и получим $1682 > 1681$; так как не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, то есть $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2} > 3$.

О т в е т. Первое число больше.

Задачи

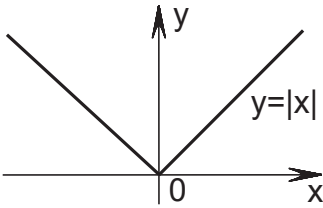
1. (ВМК-92.1) Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$ больше?
2. (Геол-94(1).1) Какое из двух чисел меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?
3. (Геол-82.1) Какое из следующих чисел больше: $\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 2 \sin \frac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5}$?
4. (У) Сравнить числа: 3^{400} и 4^{300} .
5. (У) Сравнить числа: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{19}$.
6. (ЕГЭ) Сравнить $\sqrt{2004} + \sqrt{2007}$ и $\sqrt{2005} + \sqrt{2006}$.
7. (У) Сравнить числа: $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \frac{11}{1000}$.
8. (У) Выяснить, что больше: 33^{44} или 44^{33} ?
9. (У) Сравнить числа: π и $\sqrt{10}$.
10. (У) Сравнить числа: $\left(\frac{1}{6}\right)^{1/6}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{1/5}$.

1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем

Теоретический материал

Определим *модуль* (абсолютную величину) вещественного числа x следующим образом:

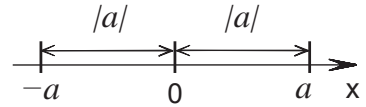
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$



Функция $y = |x|$ является чётной и неотрицательной на всей числовой оси.

Геометрическим смыслом модуля числа считается расстояние по числовой оси от начала отсчёта до рассматриваемого числа, причём одному и тому же значению $|a|$ соответствуют две симметричные относительно начала отсчёта точки: a и $-a$ соответственно.

Для преобразований выражений с модулями, а также для решения уравнений и неравенств, содержащих функции неизвестных величин под знаком модуля, рассматривают варианты раскрытия модулей в зависимости от знака подмодульного выражения. Например:



$$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \\ -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$|f(x)| > g(x) \iff \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0; \\ -f(x) > g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0; \\ -f(x) < g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \quad (10)$$

В случае нестрогих неравенств с модулем неравенства равносильных систем также становятся нестрогими. Кроме того, принципиальной разницы в приписывании случая $f(x) = 0$ к любой из получаемых систем (или даже к обеим сразу) нет.

Иногда бывает удобно раскрывать модули через геометрический смысл. Например, при положительном a

$$|f(x)| = a \iff f(x) = \pm a; \quad (11)$$

$$|f(x)| < a \iff -a < f(x) < a; \quad (12)$$

$$|f(x)| > a \iff \begin{cases} f(x) > a; \\ f(x) < -a. \end{cases} \quad (13)$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Физ-95.3) Решить уравнение $2|x+1| = 2-x$.

Решение. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x = -1$. Рассмотрим два случая.

1) При $x \geq -1$ исходное уравнение примет вид

$$2(x+1) = 2-x \iff x = 0.$$

Так как найденный корень удовлетворяет условию $x \geq -1$, то $x = 0$ является решением исходного уравнения.

2) При $x < -1$ уравнение запишется в виде

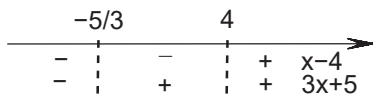
$$-2(x+1) = 2-x \iff x = -4.$$

Найденный корень удовлетворяет условию $x < -1$, следовательно, также является решением исходного уравнения.

Ответ. $-4; 0$.

Пример 2. (Экон-84.3) Решить неравенство $2|x-4| + |3x+5| \geq 16$.

Решение. Отметим нули подмодульных выражений на числовой прямой и проанализируем знаки подмодульных выражений.



1) При $x < -\frac{5}{3}$ оба подмодульных выражения отрицательны, следовательно,

$$\begin{cases} x < -\frac{5}{3}, \\ -2(x-4) - (3x+5) \geq 16; \end{cases} \iff \begin{cases} x < -\frac{5}{3}, \\ x \leq -\frac{13}{5}; \end{cases} \iff x \in \left(-\infty; -\frac{13}{5}\right].$$

2) При $-\frac{5}{3} \leq x < 4$ исходное неравенство примет вид

$$\begin{cases} -\frac{5}{3} \leq x < 4, \\ -2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{5}{3} \leq x < 4, \\ x \geq 3; \end{cases} \iff x \in [3; 4).$$

3) При $x \geq 4$ получим

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ 2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 4, \\ x \geq \frac{19}{5}; \end{cases} \iff x \in [4; +\infty).$$

Объединив все три полученных промежутка, получим ответ.

Ответ. $\left(-\infty; -\frac{13}{5}\right] \cup [3; +\infty)$.

Пример 3. (Экон-89.3) Решить уравнение $||3 - x| - x + 1| + x = 6$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $||x - 3| - x + 1| = 6 - x$ и будем раскрывать модули, начиная с внутреннего.

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ |x - 3 - x + 1| = 6 - x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 3, \\ 2 = 6 - x; \end{cases} \iff x = 4.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < 3, \\ |3 - x - x + 1| = 6 - x; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ |2x - 4| = 6 - x. \end{cases}$$

Так как при $x < 3$ всегда $6 - x > 0$, то дальше удобнее раскрывать модуль через геометрический смысл:

$$\begin{cases} x < 3, \\ \begin{cases} 2x - 4 = 6 - x; \\ 2x - 4 = x - 6; \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ \begin{cases} x = \frac{10}{3}; \\ x = -2; \end{cases} \end{cases} \iff x = -2.$$

Ответ. $-2; 4$.

Задачи

- (Хим-00.1) Решить уравнение $|x| = 2 - x$.
- (Геол.ОГ-79.1) Решить уравнение $|2x - 3| = 3 - 2x$.
- (Геогр-77.1) Решить неравенство $2|x + 1| > x + 4$.
- (Геогр-96(1).1) Решить уравнение $|5x - 3| - |7x - 4| = 2x - 1$.
- (Биол-95.2) Решить уравнение $|x - 1| + |2x - 3| = 2$.
- (Геогр-00.2) Решить уравнение $|2x + 8| - |x - 5| = 12$.
- (Псих-95.1) Решить уравнение $|2x - 15| = 22 - |2x + 7|$.
- (Псих-98.1) Решить уравнение $|4x - |x - 2| + 3| = 16$.
- (Геогр-97.1.) Решить неравенство $\frac{|x - 1| + 10}{4|x - 1| + 3} > 2$.
- (Хим-96(1).3) Решить неравенство $|x + |1 - x|| > 3$.
- (Геол-91.6) При всех значениях параметра a решить уравнение
а) $|x + 2| + a|x - 4| = 6$; б) $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.
- (Физ-84.4) Найти все значения параметра a , при которых все решения уравнения $2|x - a| + a - 4 + x = 0$ принадлежат отрезку $[0; 4]$.

1.4. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета

Теоретический материал

Квадратным трёхчленом называется выражение вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – коэффициенты (постоянные числа), $a \neq 0$, x – переменная. Если $a = 1$, то квадратный трёхчлен называется приведённым.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *квадратным уравнением*.

Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется действительным *корнем квадратного трёхчлена*, если $f(x_0) = 0$. Соответственно, это же значение x_0 обращает квадратное уравнение в верное равенство, то есть является корнем квадратного уравнения.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

По значению дискриминанта можно определить количество корней: если

- $D < 0$, то квадратный трёхчлен не имеет действительных корней;
- $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (иногда говорят о наличии двух совпадающих корней);
- $D > 0$, то квадратный трёхчлен имеет два корня, вычисляемые по формулам: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

З а м е ч а н и е. В случае $b = 2p$, $p \in \mathbb{R}$, формулы корней можно упростить, используя понятие чётного дискриминанта: $D_1 = p^2 - ac$. Тогда формулы для корней принимают вид

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D_1}}{a}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D_1}}{a}.$$

Разложение на линейные множители. Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то справедливо разложение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена.

З а м е ч а н и е. В случае нулевого дискриминанта квадратный трёхчлен преобразуется к виду $a(x - x_0)^2$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – его корень.

Используя формулы корней квадратного трёхчлена (в случае неотрицательного дискриминанта, то есть при их наличии), можно установить связь между корнями и коэффициентами, которая нередко позволяет избежать непосредственного вычисления самих корней.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 (может быть, совпадающих), то для них выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases} \quad (14)$$

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q, \end{cases} \quad (15)$$

то они же являются корнями приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$.

Применяя формулы сокращённого умножения и соотношения из теоремы Виета, можно получить полезные выражения для вычисления различных комбинаций корней квадратного уравнения без непосредственного вычисления самих корней. Например:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}; \quad (16)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) = -\frac{b}{a} \left(\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a} \right); \quad (17)$$

$$x_1^4 + x_2^4 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} \right)^2 - 2\frac{c^2}{a^2}. \quad (18)$$

Подобным образом можно выразить и многие другие комбинации корней через коэффициенты квадратного уравнения.

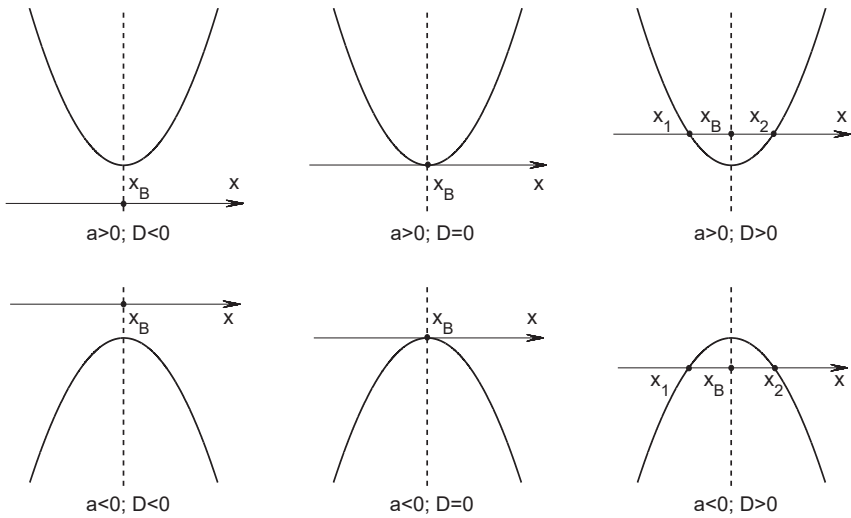
График квадратичной функции. Функция вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией*. В силу представления

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a},$$

где $D = b^2 - 4ac$, можно говорить о том, что график квадратичной функции получается из графика степенной функции $y = x^2$ последовательными элементарными преобразованиями:

$$y = x^2 \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \rightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a} = f(x);$$

то есть графиком квадратичной функции $f(x)$ является парабола с вершиной $(x_{\text{в}}; y_{\text{в}})$, где $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$, $y_{\text{в}} = -\frac{D}{4a}$. Вертикальная прямая $x = -\frac{b}{2a}$ задаёт её ось симметрии.



Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

Пересечение параболы с осью абсцисс обуславливается наличием корней у квадратного трёхчлена, то есть знаком его дискриминанта.

Замечание. Опираясь на знание расположения параболы на координатной плоскости, можно решать квадратные неравенства, избегая промежуточных преобразований. Например, для $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $D = b^2 - 4ac > 0$ и $a > 0$:

- $f(x) > 0$ при $x < x_1$ или $x > x_2$;
- $f(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$;

где x_1 и x_2 – корни трёхчлена.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геогр-80.1) Найти все значения параметра k , при которых уравнение $x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0$ имеет два различных решения.

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x и вычислим его дискриминант:

$$x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0, \quad D_1 = k^2 - (k^2 + 2k - 1) = 1 - 2k.$$

Два различных решения у квадратного уравнения будут лишь при положительном дискриминанте: $1 - 2k > 0$, откуда $k < \frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 2. (Экон.М-00.1) Решить уравнение $3|x+1| + x^2 + 4x - 3 = 0$.

Решение. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x = -1$.

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ 3(x+1) + x^2 + 4x - 3 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + 7x = 0; \end{cases} \iff x = 0.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < -1, \\ -3(x+1) + x^2 + 4x - 3 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1, \\ x^2 + x - 6 = 0; \end{cases} \iff x = -3.$$

Ответ. $-3; 0$.

Пример 3. (У) Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2 - 5x - 4 = 0$. Найти $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$.

Решение. Дискриминант данного квадратного уравнения $D = 73$; следовательно, корни иррациональны, и непосредственное вычисление выражения $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ будет громоздким. В этом случае удобнее выразить искомую комбинацию корней через коэффициенты квадратного уравнения, используя теорему Виета.

В искомом выражении вынесем общий множитель за скобку и воспользуемся формулами (14) и (16):

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} \right).$$

Подставив $a = 3$, $b = -5$, $c = -4$, получим $-196/27$.

Ответ. $-196/27$.

Задачи

- (Физ-83.2) Решить уравнение $|5x^2 - 3| = 2$.
- (Соц-00.1) Решить уравнение $|x^2 - 3x| = 2x - 4$.
- (Геол-81.1) Решить уравнение $x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$.
- (Биол-96.2) Решить уравнение $(x - 7)^2 - |x - 7| = 30$.
- (Геол-95.2) Решить неравенство $x^2 - 6 \geq |x|$.
- (Геол-77.2) Решить неравенство $x^2 - |5x - 3| - x < 2$.
- (Хим-95.1) Решить неравенство $\frac{3x}{x^2 + 2} \geq 1$.
- (ВМК-87.2) Существуют ли действительные значения a , для которых $a^2 - 4a + \sqrt{3} = -a\sqrt{2}$? Если да, то сколько их?

9. (Почв-96.2) Решить неравенство $3x^4 + 4 < 13x^2$.
10. (Геол-98.2) Решить уравнение $||4 - x^2| - x^2| = 1$.
11. (Филол-98.1) Решить неравенство $\frac{x^2 + 4x + 3}{|1 + x|} \leq 0$.
12. (Экон.К-83.1) Решить уравнение $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.
13. (У) Решить уравнение $x^2 + px + 35 = 0$ при условии, что сумма квадратов корней равна 74.
14. (У) Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^4 + x_2^4$, не вычисляя этих корней.
15. (Геогр-92.2) Найти три числа a, b и c , если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственное решение $x = 2$.
16. (ВМК-80.4) Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(3a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ имеет два различных корня.

2. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства, простейшие системы уравнений

2.1. Рациональные уравнения и неравенства, метод интервалов

Теоретический материал

Неравенство называется *рациональным*, если левая и правая его части есть суммы отношений многочленов. При решении рациональных неравенств удобно применять метод интервалов. Для этого неравенство приводится к виду

$$\frac{(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \dots (x - x_k)^{p_k}}{(x - x_{k+1})^{p_{k+1}}(x - x_{k+2})^{p_{k+2}} \dots (x - x_n)^{p_n}} \geq 0,$$

где p_m – кратность корня x_m .

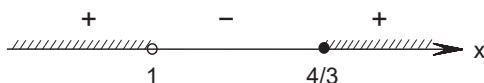
При этом полезно следовать следующему правилу: *при старшей степени в уравнениях и неравенствах должен быть знак плюс*, то есть каждая разность должна иметь вид $(x - x_m)$, а не $(x_m - x)$. Затем рисуется числовая ось, на ней расставляются все корни x_k , при этом точки, стоящие в знаменателе, выкальваются, а точки, стоящие в числителе, выкальваются, если неравенство строгое. После этого находятся знаки левой части на получившихся интервалах: они чередуются с учётом кратности каждого корня. Для наглядности можно рисовать змейку: начинаем справа сверху, переходим через ось, если кратность корня нечётная, и остаёмся на той же стороне, если кратность корня чётная.

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-87.3) Решить неравенство $\frac{1}{1-x} \geq -3$.

Решение. Перенесём всё в одну сторону и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{1}{1-x} + 3 \geq 0 \iff \frac{1+3(1-x)}{1-x} \geq 0 \iff \frac{4-3x}{1-x} \geq 0 \iff \frac{3x-4}{x-1} \geq 0;$$



значит, $x < 1$ или $x \geq \frac{4}{3}$.

О т в е т. $(-\infty; 1) \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right)$.

Пример 2. (Биол-84.1) Решить неравенство $\frac{x}{1-x} < x-6$.

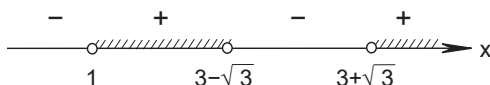
Решение. Перенесём всё в одну сторону и приведём к общему знаменателю:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} - x + 6 < 0 &\iff \frac{x + (6-x)(1-x)}{1-x} < 0 \iff \\ &\iff \frac{x+6-x+x^2-6x}{1-x} < 0 \iff \frac{x^2-6x+6}{x-1} > 0. \end{aligned}$$

Найдём нули числителя:

$$x^2 - 6x + 6 = 0 \iff x = 3 \pm \sqrt{3}.$$

Проставим знаки дроби на числовой оси:



значит, $1 < x < 3 - \sqrt{3}$ или $x > 3 + \sqrt{3}$.

О т в е т. $(1; 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}; +\infty)$.

Пример 3. (ИСАА-92.3) Решить неравенство $\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \leq 1$.

Решение. Подмодульные выражения меняют знаки в точках $x = 5$ и $x = 6$.

1) При $x < 5$ исходное неравенство запишется в виде

$$\frac{5-x-1}{2(6-x)-4} \leq 1 \iff \frac{4-x}{2(4-x)} \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq 1, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Следовательно, в этом случае $x \in (-\infty; 4) \cup (4; 5)$.

2) При $5 \leq x < 6$ получим

$$\frac{x-5-1}{2(6-x)-4} \leq 1 \iff \frac{x-6}{8-2x} \leq 1 \iff \frac{x-6-8+2x}{8-2x} \leq 0 \iff \frac{3x-14}{x-4} \geq 0.$$

Это неравенство выполняется $\forall x \in [5, 6)$.

3) При $x \geq 6$ неравенство примет вид

$$\frac{x-5-1}{2(x-6)-4} \leq 1 \iff \frac{x-6}{2x-16} \leq 1 \iff \frac{x-6-2x+16}{x-8} \leq 0 \iff \frac{x-10}{x-8} \geq 0,$$

откуда, с учётом условия $x \geq 6$, получим $x \in [6; 8) \cup [10; +\infty)$.

Объединив все результаты, получим ответ.

О т в е т. $(-\infty; 4) \cup (4; 8) \cup [10; +\infty)$.

Задачи

1. (ЕГЭ) Решить неравенство $\frac{(x-2)(4x+3)}{x+4} \geq 0$.
2. (ЕГЭ) Решить неравенство $\frac{2}{x} - 10 \geq 0$.
3. (ЕГЭ) Решить неравенство $\frac{3x^2+3x}{x-5} \leq 0$.
4. (М/М-77.1) Решить неравенство $x \leq 3 - \frac{1}{x-1}$.
5. (Псих-82.1) Решить неравенство $\frac{2x-3}{4-x} > \frac{1}{x}$.
6. (Почв-00(1).1) Решить неравенство $\frac{1}{3-2x} \leq 1$.
7. (Геогр-00(1).1) Решить неравенство $x \leq \frac{8x-2}{x+5}$.
8. (ИСАА-00.1) Решить неравенство $|2x-1| > \frac{1}{x-2}$.
9. (Геол-82.2) Решить неравенство $\frac{2x+5}{|x+1|} \geq 1$.
10. (Биол-99.2) Решить неравенство $\frac{3}{|x-1|} \geq 2x+5$.
11. (Геол-96(1).1) Решить неравенство $\frac{1}{x-1996} \leq \frac{x}{x-1996}$.
12. (Филол-99.2) Решить неравенство $\frac{1}{x^2+8x-9} \geq \frac{1}{3x^2-5x+2}$.

[. . .]



BMK МГУ – ШКОЛЕ



Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

- на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
- для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
- сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

*Декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова,
академик РАН **Е. И. Мусеев***

Сайт факультета BMK МГУ:

<http://www.cs.msu.ru>

