ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

ОСНОВНОЙ КУРС
с решениями и указаниями

ЕГЭ
ОЛИМПИАДЫ
ЭКЗАМЕНЫ в ВУЗ

ГЕОМЕТРИЯ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

ГЕОМЕТРИЯ

ОСНОВНОЙ КУРС
с решениями и указаниями

Учебно-методическое пособие

Под редакцией
М. В. Федотова

Москва
Лаборатория знаний

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Геометрия. Основной курс с решениями и указаниями : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : Лаборатория знаний, 2018. — 302 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

ISBN 978-5-00101-140-8

Настоящее пособие составлено на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова и задач Единого государственного экзамена преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения задач.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

УДК 373.3:51
ББК 22.1я729

Учебное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Семендяева Наталья Леонидовна
Федотов Михаил Валентинович

**ГЕОМЕТРИЯ.
ОСНОВНОЙ КУРС С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ**

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 10.10.17. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 24,7. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-00101-140-8

Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, Вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета Вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии и физике. По каждому предмету вышли два пособия: основной курс и углубленный курс, содержащий сложные задачи единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М.В. Ломоносова). Основной курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач первой части ЕГЭ и некоторых задач второй части, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Углубленный курс содержит задачи, научившись решать которые, вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведённое время можно просто физически не успеть решить все задачи).

В серии «ВМК МГУ – школе» вышли два пособия по информатике. Первое рекомендуется в качестве пособия при подготовке к ЕГЭ по информатике и ИКТ. Разделы этого пособия соответствуют темам, включенным в ЕГЭ. Второе – пособие по программированию – поможет вам подготовиться к экзамену по информатике, научиться решать задачи по программированию на языке Паскаль.

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** всех предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показал опыт наших дистанционных подготовительных курсов, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С помощью нашего пособия приобретение такого опыта учениками будет значительно облегчено. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу. **Второй особенностью** наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причём каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Директор учебного центра
факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
М. В. Федотов

Предисловие

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе задач вступительных экзаменов по математике в МГУ и задач единого государственного экзамена. «Основной курс» рассчитан на закрепление школьного материала по геометрии и приобретение навыков, необходимых для решения задач ЕГЭ и стандартных задач вступительных экзаменов в вуз.

Предлагаемый курс изначально не предполагает знаний, выходящих за рамки базовой школьной программы. Все приёмы, необходимые для решения задач, демонстрируются по ходу изучения материала.

Задачи в разделах расположены по принципу *«от простого – к сложному»*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если Вам не удалось получить правильный ответ или у Вас возникли сомнения в правильности Вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

Необходимо отметить, что в реальных экзаменационных заданиях в формулировках задач наряду с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$. По этой причине в формулировках задач также встречаются оба вида терминологии.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Теория и задачи

ПЛАНИМЕТРИЯ

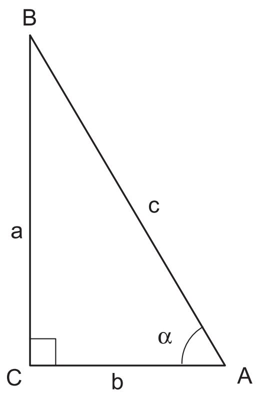
1. Треугольники

1.1. Прямоугольные треугольники

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, связанные с прямоугольными треугольниками. При решении этих задач необходимо знать и уметь применять следующие формулы и теоремы.

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, здесь a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза.



Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

здесь α – угол, противолежащий катету a.

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Значения тригонометрических функций основных углов:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

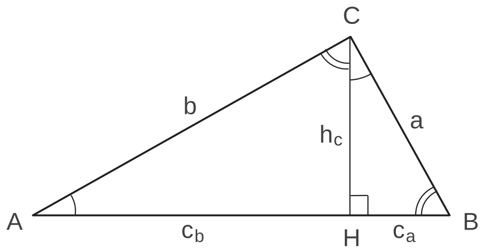
$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Формула длины высоты, проведённой к гипотенузе:

$$h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{c_a c_b},$$

где c_a и c_b – проекции катетов a и b на гипотенузу c.



Для доказательства первого равенства достаточно записать площадь треугольника ABC двумя способами:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h_c c = \frac{1}{2} ab \quad \Longrightarrow \quad h_c = \frac{ab}{c}.$$

Справедливость второго равенства следует из подобия треугольников, на которые высота, проведённая из вершины прямого угла, разбивает исходный треугольник:

$$\Delta ACH \sim \Delta CBH \quad \Longrightarrow \quad \frac{h_c}{c_b} = \frac{c_a}{h_c} \quad \Longrightarrow \quad h_c = \sqrt{c_a c_b}.$$

Заметим также, что оба треугольника подобны исходному треугольнику ABC по двум углам:

$$\Delta ACH \sim \Delta ABC \quad (\angle AHC = \angle ACB = 90^\circ, \text{ угол } A \text{ общий}),$$

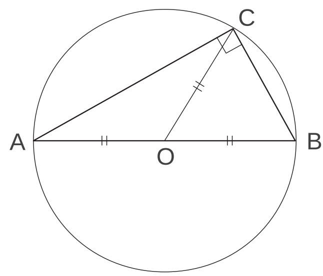
$$\Delta CBH \sim \Delta ABC \quad (\angle CHB = \angle ACB = 90^\circ, \text{ угол } B \text{ общий}).$$

Напомним основные факты, связанные с произвольными треугольниками.

- Сумма углов треугольника равна 180°.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка есть центр вписанной окружности. При этом радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен соответствующей стороне треугольника, а отрезки касательных, проведённых из одной вершины – равны.[1]
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка есть центр описанной окружности.

[1] Более подробно свойства окружностей будут рассмотрены в соответствующем разделе.

З а м е ч а н и е. Центр описанной окружности лежит внутри треугольника, если треугольник остроугольный, и вне треугольника, если он тупоугольный. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. В этом случае радиус описанной окружности равен медиане, проведённой к гипотенузе, и половине гипотенузы.

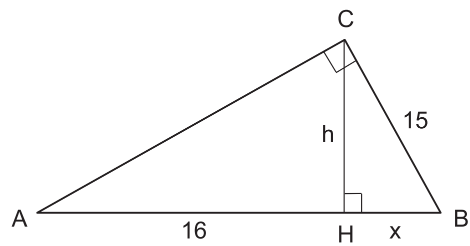


Примеры решения задач

П р и м е р 1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть катет $BC = 15$, а проекция катета AC на гипотенузу AB равна 16.

Поскольку диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе, нам надо найти проекцию катета BC на гипотенузу. Обозначим высоту CH через h, а проекцию катета BC на гипотенузу через x. По свойству высоты, проведённой к гипотенузе, и теореме Пифагора, применённой к ΔBCH, получим



$$\begin{cases} h^2 = 16x, \\ h^2 + x^2 = 15^2; \end{cases} \implies x^2 + 16x - 15^2 = 0 \implies x = 9,$$

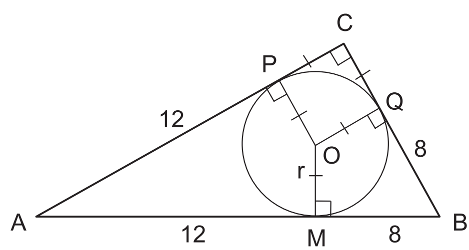
откуда диаметр $d = AB = 25$.

О т в е т. 25.

П р и м е р 2. Окружность с центром O вписана в прямоугольный треугольник ABC. Она касается гипотенузы AB в точке M, причём $AM = 12$ и $BM = 8$. Найдите площадь треугольника AOB.

Р е ш е н и е. Для того, чтобы найти площадь треугольника AOB, нам надо найти его высоту OM, которая равна радиусу вписанной окружности. Его и будем искать.

Пусть P и Q – точки касания вписанной окружности с катетами AC и BC. Четырёхугольник $PCQO$ является прямоугольником, поскольку у него $\angle C = 90^\circ$ по условию, а $OP \perp PC$ и $OQ \perp QC$ как радиусы в точках касания. Кроме того, он является квадратом, так как $OP = OQ = r$, где r – радиус вписанной окружности.



По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AP = AM = 12$ и $BQ = BM = 8$.

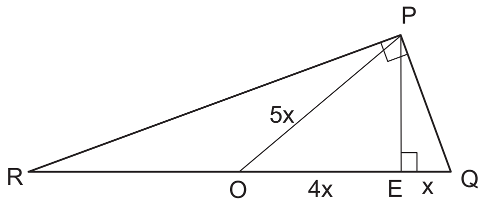
Применив теорему Пифагора к треугольнику ABC, получим:

$$(12+8)^2 = (12+r)^2 + (8+r)^2 \implies r = 4 \implies S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot r = 40.$$

Ответ. 40.

Пример 3. Определить отношение длин медианы PO и высоты PE, проведённых из вершины P к гипотенузе QR в прямоугольном треугольнике PQR, если $QO : QE = 5 : 1$.

Решение. Пусть $QE = x$, тогда $QO = 5x$ и, следовательно, $EO = 4x$. Выразим через x высоту PE.



Так как в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы, то

$$PO = \frac{1}{2}QR = QO = 5x.$$

Применив теорему Пифагора к ΔPOE, получим:

$$PE = \sqrt{(5x)^2 - (4x)^2} = 3x \implies \frac{PO}{PE} = \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Ответ. $5 : 3$.

Задачи

1. В прямоугольном треугольнике угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 10°. Найдите острые углы треугольника.

2. Катеты прямоугольного треугольника имеют длину 12 и 5. Найдите длину медианы, проведённой к гипотенузе.

3. В прямоугольном треугольнике острые углы относятся как $1 : 2$, а больший катет равен $4\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если длина гипотенузы равна $2\sqrt{13}$ см, а длина медианы большего острого угла равна 5 см.

5. Средние линии прямоугольного треугольника, параллельные катетам, равны 5 см и 12 см. Найдите высоту треугольника h, опущенную из вершины прямого угла. В ответе запишите $13h$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, CM – медиана треугольника. Найти острые углы треугольника, если угол AMC равен 42°.

7. Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен 40°. Найти углы треугольника ABC.

8. В прямоугольном треугольнике ABC $AC = 3$, $BC = 4$. Окружность с центром в точке A проходит через точку C и пересекает гипотенузу AB в точке K. Найти отношение длин отрезков AK и BK.

9. В прямоугольном треугольнике медианы, проведённые к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу.

10. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы его вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

11. В прямоугольном треугольнике один из катетов больше медианы, проведённой из вершины прямого угла, на $0,5$. Найти его площадь, если второй катет равен 4.

12. В треугольнике ABC известны стороны $AC = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$. Пусть BD – высота этого треугольника. Найти длину отрезка AD.

13. Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 20, а проекция другого катета на гипотенузу равна 9.

14. Около окружности с центром O описан прямоугольный треугольник MPK с гипотенузой MK. Луч MO пересекает катет PK в точке C. Найдите длину отрезка CP, если точка касания с окружностью делит катет PK на отрезки $PH = 4$ и $HK = 12$.

15. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности?

16. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AC = 20$ проведена медиана BM. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается медианы BM в точке P. Найдите катет BC, если $BP : PM = 3 : 2$.

17. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, медиана $BM = 10\sqrt{3}$. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается гипотенузы AC в точке T. Найдите BC, если $AT : TC = 1 : 3$.

18. Пусть r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Докажите, что $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

1.2. Общие треугольники. Теоремы синусов, косинусов

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, при решении которых используются следующие теоремы, справедливые для любого треугольника.

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R.$

Теорема косинусов: $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma.$

Здесь и далее a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – противолежащие им углы; R – радиус описанной около треугольника окружности.

Напомним также и некоторые другие утверждения, справедливые для произвольных треугольников.

- В треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон (*неравенство треугольника*).
- В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол.
- Площадь треугольника равна

  $$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\quad S=\frac{1}{2}ch_c,\quad S=\frac{abc}{4R},\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad S=pr,$$

  где r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника.

Кроме того, при решении задач этого раздела могут пригодиться следующие тригонометрические формулы.

Формулы приведения: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x;\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x;\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x.$$

Формулы для тригонометрических функций от суммы и разности:

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y;$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y.$$

Примеры решения задач

Пример 1. В треугольник со сторонами $AB=8$, $BC=6$, $AC=4$ вписана окружность. Найти длину отрезка DE, где D и E – точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

Решение. Для того, чтобы вычислить DE, необходимо знать AE, AD и косинус угла между ними. Тогда по теореме косинусов можно будет найти DE.

Обозначим равные отрезки касательных

$$BD=BF=x,\ CF=CE=y,\ AE=AD=z.$$

По условию

$$\begin{cases} x+y=6,\\ y+z=4,\\ x+z=8; \end{cases}$$

откуда $z=3$.

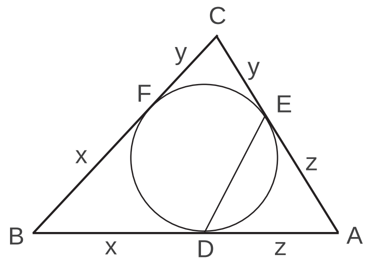
Из теоремы косинусов, применённой к ΔABC, получим

$$6^2 = 8^2 + 4^2 - 2\cdot 8\cdot 4\cdot\cos\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\alpha = \frac{11}{16}.$$

Теперь применим теорему косинусов к ΔADE:

$$DE^2 = 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{11}{16} = \frac{45}{8},$$

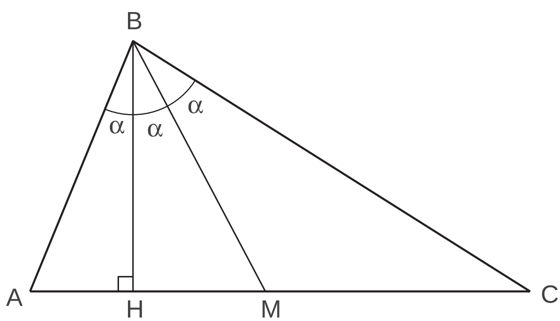
откуда $DE = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.



О т в е т. $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

П р и м е р 2. Определить стороны треугольника, если медиана и высота, проведённые из вершины одного угла, делят угол на три равные части, а сама медиана равна 10.

Р е ш е н и е. Пусть BH и BM – соответственно высота и медиана треугольника ABC и $\angle ABH = \angle HBM = \angle MBC = \alpha$, тогда $\angle BAH = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle BCA = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. Для того, чтобы найти стороны треугольника, достаточно найти угол α.



Применим к треугольникам ABM и BMC теорему синусов:

$$\frac{AM}{\sin 2\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \qquad \frac{MC}{\sin\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}.$$

Теперь поделим почленно одно равенство на другое. Поскольку $AM = MC$, получим

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin 4\alpha = \sin 2\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \sin 2\alpha\cdot(2\cos 2\alpha - 1) = 0.$$

Так как $0 < 3\alpha < \pi$, то $\sin 2\alpha \neq 0$. Следовательно, $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle ABC = 3\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$ и $\angle ACB = \dfrac{\pi}{6}$. По условию медиана $BM = 10$, следовательно, гипотенуза $AC = 2BM = 20$, а катеты $AB = 10$ и $BC = 10\sqrt{3}$.

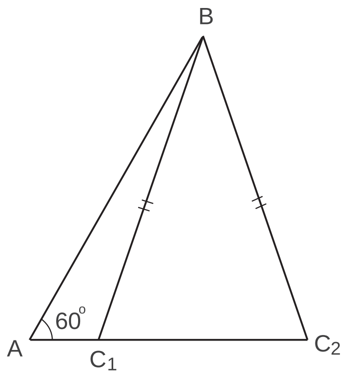
О т в е т. $20;\ 10;\ 10\sqrt{3}$.

Пример 3. В треугольнике ABC сторона $AB = 24$, $\angle BAC = 60^\circ$, радиус описанной окружности равен 13. Найти сторону AC.

Решение. Для нахождения стороны AC надо знать сторону BC, которую легко найти с помощью теоремы синусов:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \Longrightarrow \quad BC = 13\sqrt{3}.$$

Теперь обозначим искомую сторону AC через x и запишем теорему косинусов для ΔABC:



$$(13\sqrt{3})^2 = 24^2 + x^2 - 2\cdot 24\cdot x\cdot\cos 60^\circ \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 24x + 69 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = 12 \pm 5\sqrt{3}.$$

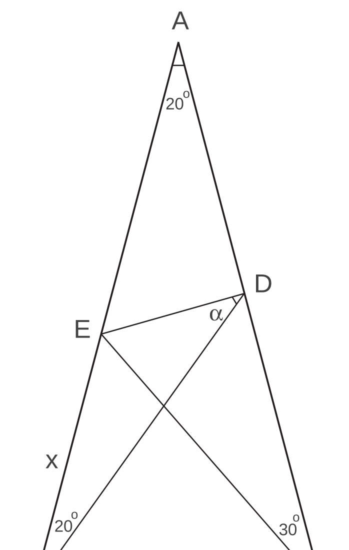
В обоих случаях

$$AB = 24 > BC = 13\sqrt{3} > AC = x_{1,2} = 12 \pm 5\sqrt{3}.$$

Следовательно, существует два треугольника (ΔABC_1 – тупоугольный и ΔABC_2 – остроугольный), удовлетворяющих условиям нашей задачи.

Ответ. $12 \pm 5\sqrt{3}$.

Пример 4. Пусть равнобедренный треугольник ABC имеет углы B и C, равные 80°. На отрезке AC взята точка D, а на отрезке AB – точка E так, что $\angle DBC = 60^\circ$ и $\angle ECB = 50^\circ$. Найти угол EDB.



Решение. Треугольник BCE является равнобедренным, так как у него

$$\angle BEC = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCE = 50^\circ = \angle BCE.$$

Обозначим $BC = BE = x$, $\angle BDE = \alpha$ и применим теорему синусов к ΔBDE и ΔBDC:

$$\frac{BD}{\sin(\alpha + 20^\circ)} = \frac{x}{\sin\alpha}, \qquad \frac{BD}{\sin 80^\circ} = \frac{x}{\sin 40^\circ}.$$

Поделив равенства почленно одно на другое, получим

$$\frac{\sin 80^\circ}{\sin(\alpha + 20^\circ)} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin\alpha} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\cos 40^\circ \sin\alpha = \sin(\alpha + 20^\circ) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\cos(60^\circ - 20^\circ)\sin\alpha = \sin(\alpha + 20^\circ) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos 20^\circ \sin\alpha + \sqrt{3}\sin 20^\circ \sin\alpha = \sin\alpha\cos 20^\circ + \cos\alpha\sin 20^\circ \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{3}\sin 20^\circ \sin\alpha = \cos\alpha\sin 20^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}.$$

Следовательно, искомый угол $\alpha = \angle EDB = 30^\circ$.

Ответ. 30°.

Задачи

1. Есть ли тупой угол у треугольника, стороны которого равны 10, 14 и 7?

2. Стороны треугольника равны 2, 3, 4. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

3. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Боковая сторона равна 4. Найдите квадрат длины медианы, проведённой к боковой стороне.

4. Из точки A, лежащей на окружности, проведены две хорды, равные 7 и 15. Найдите диаметр окружности, если расстояние между серединами хорд равно 10.

5. Найти углы треугольника, если высота и медиана, проведённые из одной и той же вершины, образуют с боковыми сторонами углы, равные α.

6. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в 6 раз короче гипотенузы. Найти острые углы треугольника.

7. Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{3}$.

8. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC соответственно в точках M, D, N. Известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\widehat{BCA} = \dfrac{\pi}{3}$. Найти MD.

9. Известны длины двух сторон $a = 7$, $b = 9$ треугольника и его площадь $S = 14\sqrt{5}$. Третья сторона треугольника больше удвоенной медианы, проведённой к ней. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

10. У треугольника известны длины двух сторон и площадь: $a = 6$, $b = 8$, $S = 3\sqrt{15}$. Третья его сторона меньше удвоенной медианы, проведённой к ней. Найти радиус вписанной в этот треугольник окружности.

11. Прямая, проходящая через точки G и K, служит биссектрисой угла FGH. Известно, что $KF \perp GF$, $KH \perp GH$, $KF = KH = 8$, $GK = 17$. Отрезок GL содержит точку F, $FL = 2$. Отрезок GM содержит точку H и $HM = 19$. Найти длину отрезка ML.

12. В треугольнике KMN сторона $KM = 6$, $MN - KN = 2$, $\cos\angle KMN = 3/5$. Найти площадь треугольника KMN.

13. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равняется стороне AB этого треугольника. Найти высоту треугольника ABC, проведённую из точки C, если она меньше $1/2$, а две другие стороны треугольника равны 2 и $\sqrt{3}$.

14. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 7$, $AC = 8$ и $\cos\angle BAC = \dfrac{11}{16}$. На стороне BC выбрана такая точка D, что $DC : BC = 1 : 3$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABD.

[. . .]

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

– на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
– для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
– сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН ***Е. И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru